



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et Applications*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Yoann Offret**

préparée à l'unité de recherche 6625 su CNRS : IRMAR  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
UFR de Mathématiques

---

**Dynamique de  
diffusions inhomogènes  
sous des conditions  
d'invariance d'échelle**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 25 juin 2012**

devant le jury composé de :

**Arnaud Debussche**

Professeur ENS cachan Bretagne / président du Jury

**Nicolas Fournier**

Professeur Université Paris Est / examinateur

**Mihai Gradinaru**

Professeur Université Rennes 1 / directeur de thèse

**Samuel Herrmann**

Professeur Université Bourgogne / examinateur

**Peter Imkeller**

Professeur Humboldt-Universität Berlin / rapporteur

**Zhan Shi**

Professeur Université Paris VI / rapporteur







# Dynamique de diffusions inhomogènes sous des conditions d'invariance d'échelle

Yoann Offret



*En mémoire de Matthieu,*





# Remerciements

Tout d'abord il m'est agréable, avant de commencer cette thèse, d'adresser quelques remerciements à tous ceux et celles qui m'ont permis, de près ou de loin, d'écrire ce manuscrit. Je demande par avance à toutes les personnes que je vais oublier de m'excuser, la mémoire m'a toujours fait défaut (comme l'orthographe).

Mes premières pensées iront évidemment à Mihai Gradinaru qui m'a conseillé et soutenu tout au long de l'élaboration de cette thèse. Je lui exprime ma profonde gratitude pour sa grande disponibilité et sa gentillesse qui ne lui ont jamais manquées durant ces quatre années. Il a toujours été de bon conseil et je suis heureux qu'il ait guidé mes premiers pas dans le monde des mathématiciens. Merci de m'avoir aidé à écrire mon premier article sur un sujet aussi fertile !

De plus, c'est en autres lui, de part ses qualités pédagogiques et la clarté de ses cours, qui m'a donnée l'envie de faire des Probabilités mon métier.

Je remercie également Peter Imkeller et Zhan Shi qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de cette thèse. L'un comme l'autre sont de grandes figures du monde des mathématiques et je suis plus qu'heureux de l'honneur qu'ils me font.

Je souhaite aussi remercier Arnaud Debussche, Nicolas Fournier et Samuel Herrmann d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Merci à Arnaud de m'avoir si bien conseillé et guidé durant toutes mes études à l'ENS Cachan Bretagne ainsi que pour l'attention toute particulière qu'il porte à tous ses étudiants, longtemps même après qu'ils aient quitté le nids.

Nicolas Fournier ne le sait peut-être pas encore, mais il a accepté l'année dernière d'être le directeur de thèse de mon (presque) sosie de CV. Je suis heureux qu'il les rende encore un peu plus similaires en participant à mon jury.

J'ai eu le plaisir de rencontrer Samuel Herrmann à plusieurs reprises. Il a d'ailleurs écrit, entre autres, le premier article que j'ai lu en entier (et presque compris). J'espère pouvoir un jour travailler avec lui sur des sujets analogues.

Je suis par ailleurs très reconnaissant envers Yves Guivarc'h de m'avoir accordé un peu de son temps et de m'avoir (sans le savoir) redonné espoir à un moment où je ne voyais pas le début de la moindre piste. J'avais même avoué à mon cousin peu de temps avant cette rencontre que j'allais changer mes hypothèses pour finir ma thèse à temps... Il n'en a heureusement rien été !

Il m'a été très agréable de travailler dans l'équipe de processus stochastiques à l'IRMAR. Remerciements tout particulier à Hélène Guérin et Florent Malrieu (sans x) pour leur joie et leur bonne humeur, aussi communicative que la passion avec laquelle ils enseignent si bien les Probabilités, tout comme le reste de la fine équipe : Jean-Baptiste Bardet et Philippe Briand. Ils

sont pour beaucoup dans les choix de mon parcours.

Je remercie plus généralement tout le personnel du Laboratoire de Mathématiques pour le cadre de travail exceptionnel qui y règne. Merci à toute l'équipe administrative pour leur compétence, leur disponibilité et leur patience face aux nombreux procrastinateurs comme moi.

Même si cela n'a pas toujours été facile, cela a été une chance et un réel plaisir de faire la majeure partie de mes études supérieures à Rennes. J'y ai rencontré des amis vraiment formidables, qui ont été plus que présents dans les coups durs (très durs) et sans qui, c'est certain, l'histoire n'aurait pas été la même. Je leur dois bien plus que je ne pourrai leur rendre.

Je remercie mes parents, Yveline et François, ainsi que la frangine et le frangin, Laëtitia et Mickaël, d'avoir pris le temps d'assister à ma soutenance. Je remercie aussi énormément ma grand-mère Julienne de m'avoir tant aidé durant toute ma jeunesse.

Merci enfin à Leila, Karine, Tiffany, Chloé, BT, Maëlle, Catherine, Marine, Antonin, Cyrille, Nora, Mickaël, Jean-Louis, Sophie, Baptiste, Baron, François, Émeline, Arnaud, Galton, Céline, Lucas, Vincent pour leur amitié, les soirées, les cinés, les parties de Kubb, les tennis, les tennis de table sur table à mangé, les tennis nocturnes, la piscine, l'amaryllis, le backgammon, leurs calembours, les pokers, les parties de Mölkky, le badminton, les footings, les barbecues, les nuits blanches, les roupettes, les coinches, les cafés, les parties de palet, les soccers et j'en passe et des meilleurs !

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Motivations, résultats et perspectives</b>	<b>1</b>
1.1	Exemples issus des marches aléatoires	3
1.1.1	Le modèle de Menshikov et Volkov	3
1.1.2	Le modèle d'urne de Friedman	4
1.2	Extension à une diffusion en milieu déterministe	5
1.2.1	Présentation du modèle	5
1.2.2	Notations.	9
1.2.3	Existence, unicité et explosion	10
1.2.4	Cas répulsif	11
1.2.5	Estimations numériques de la probabilité de survie	13
1.2.6	Cas attractif	16
1.2.7	Schéma des preuves	17
1.3	Motivations en milieu aléatoire	20
1.3.1	Introduction générale	20
1.3.2	Le modèle de Brox	20
1.3.3	Illustrations numériques du phénomène de localisation	22
1.4	Diffusions dont le milieu aléatoire dépend du temps	24
1.4.1	Le modèle de Brox inhomogène	24
1.4.2	Fluctuations du potentiel d'Ornstein-Uhlenbeck	26
1.4.3	Approximations numériques des distributions stationnaires	30
1.4.4	Observation d'un déphasage avec le cas homogène dans le cas critique	36
1.4.5	Retour au modèle de Brox inhomogène	39
1.4.6	Illustrations numériques des différents TCLs	40
1.4.7	Schéma des preuves	43
1.5	Perspectives de recherche	45
1.5.1	En milieu déterministe	45
1.5.2	En milieu aléatoire	48
1.5.3	Illustrations numériques des conjectures	49
<b>I</b>	<b>Diffusions inhomogènes en milieux déterministes</b>	<b>55</b>
<b>2</b>	<b>Time-inhomogeneous Brownian diffusions</b>	<b>57</b>

2.1	Introduction . . . . .	58
2.2	Scaling transformation and associated equations . . . . .	63
2.2.1	Scaling transformation . . . . .	63
2.2.2	Two particular transformations . . . . .	64
2.3	Preliminary study of solutions . . . . .	67
2.3.1	Existence and uniqueness . . . . .	67
2.3.2	Explosion of solutions . . . . .	70
2.4	Asymptotic behaviour of solutions . . . . .	74
2.4.1	Behaviour on the critical line: $2\beta = \alpha + 1$ . . . . .	74
2.4.2	Behaviour above the critical line: $2\beta > \alpha + 1$ . . . . .	78
2.4.3	Behaviour under the critical line: $2\beta < \alpha + 1$ . . . . .	83
2.5	Appendix . . . . .	89
2.5.1	Proof of Lemma 2.3.8 . . . . .	89
2.5.2	Proof of Lemma 2.4.5 . . . . .	91
 <b>II Diffusions inhomogènes en milieux aléatoires</b>		<b>93</b>
 <b>3 Diffusions in time-varying random environments</b>		<b>95</b>
3.1	Introduction . . . . .	96
3.2	Model and statement of results . . . . .	99
3.2.1	Fluctuating Ornstein-Uhlenbeck potential . . . . .	99
3.2.2	Cocycle property and Aronson estimate . . . . .	101
3.2.3	Quasi-invariant and stationary probability measures . . . . .	102
3.3	Application to time-inhomogeneous Brox's diffusions . . . . .	105
3.4	Proof of existence and uniqueness . . . . .	107
3.4.1	Equivalent SDE and martingale problem . . . . .	107
3.4.2	Chain rule and nonexplosion . . . . .	109
3.5	Proof of strong Feller property . . . . .	111
3.6	Preliminaries results . . . . .	113
3.6.1	Uniform affine approximations of the environment . . . . .	113
3.6.2	Random Foster-Lyapunov drift conditions . . . . .	115
3.6.3	Coupling method . . . . .	117
3.6.4	Ergodicity and key lemma . . . . .	119
3.7	Proof of convergence results in the critical case . . . . .	121
3.7.1	Exponential weak ergodicity and quasi-invariant measure . . . . .	121
3.7.2	Annealed convergences . . . . .	122
3.8	Proof of convergence results in the super-critical case . . . . .	123
3.9	Appendix . . . . .	124
3.9.1	Proof of Lemma 3.6.2 . . . . .	124
3.9.2	Proof of Lemma 3.6.3 . . . . .	126
3.9.3	Proof of Lemma 3.6.8 . . . . .	127

# Chapitre 1

## Description synthétique des motivations, des résultats et des perspectives

Nous présentons dans cette introduction les motivations et les principaux résultats obtenus dans cette thèse ainsi que quelques perspectives de recherche. Les détails seront énoncés dans chacune des deux principales parties qui constituent ce manuscrit. Celles-ci pourront être lues de manière indépendante.

Cette thèse a pour principal objectif d'étudier le comportement asymptotique de certaines familles de processus stochastiques dont la dynamique dépend, non seulement de la position, mais aussi du temps.

Bien qu'il semble vain de chercher à donner des critères généraux sur le comportement en temps long de tels processus, nous pouvons cependant nous intéresser à ceux dont le terme de diffusion et le potentiel possèdent certaines conditions d'invariance d'échelle.

Nous cherchons à obtenir des conditions sur les indices d'auto-similarité pour lesquels ces processus sont récurrents ou transients et, plus particulièrement, à déterminer les bonnes normalisations de ces processus pour lesquelles il y a convergence (convergence en loi, presque sûre, loi du type logarithme itéré, etc...).

Donnons pour fixer les idées l'exemple fondamental du mouvement brownien standard unidimensionnel. C'est un processus de diffusion  $\{B_t : t \geq 0\}$  (ainsi qu'une martingale) récurrent et auto-similaire d'indice  $1/2$ . Nous avons en effet, pour tout  $\lambda > 0$ , l'égalité en loi des processus

$$\{B_{\lambda t} : t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^{1/2} B_t : t \geq 0\}, \quad (1.0.1)$$

ainsi que les convergences en loi et presque sûre suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad \text{p.s.} \quad (1.0.2)$$

## Principe heuristique

La ligne directrice qui sous-tend les différents résultats présentés dans ce manuscrit est la mise en évidence, ou l'infirmité le cas échéant, du principe suivant.

**1. Le modèle.** Soit  $Z$  un processus de diffusion auto-similaire d'indice  $h_d$  et  $V(t, x)$  un milieu (ou potentiel) auto-similaire, en temps et en espace, d'indices respectifs  $h_t$  et  $h_x$ . Considérons alors le processus  $Z$  plongé dans le potentiel  $V$ . Il satisfait, formellement, l'équation

$$dX_t = dZ_t - \frac{1}{2} \nabla_x V(t, X_t) dt. \quad (1.0.3)$$

**2. La droite critique.** Nous définissons la droite critique associée à  $X$  en fonction des différents indices d'auto-similarité par l'équation

$$h_d(h_x - 2) + h_t + 1 = 0. \quad (1.0.4)$$

**3. Comportements attendus.** Nous attendons alors les comportements suivants, en fonction de la position des différents indices d'auto-similarité par rapport à cette droite critique.

$h_d(h_x - 2) + h_t + 1 < 0$	Le milieu $V$ disparaît et $X$ se comporte asymptotiquement comme le terme de diffusion $Z$
$h_d(h_x - 2) + h_t + 1 = 0$	$X$ et $Z$ ont le même comportement diffusif mais l'éventuelle loi limite dépend du milieu $V$
$h_d(h_x - 2) + h_t + 1 > 0$	$X$ a un comportement dépendant fortement du milieu $V$

FIGURE 1.1 – Comportements heuristiques

## 1.1 Exemples issus des marches aléatoires

### 1.1.1 Le modèle de Menshikov et Volkov

Notre première motivation est de généraliser au cas continu les résultats de Menshikov et Volkov obtenus dans [1]. Dans cet article, ils étudient une marche aléatoire  $\{X_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  sur  $\mathbb{R}^+$  satisfaisant

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | X_n = x) = \rho \frac{x^\alpha}{n^\beta}. \quad (1.1.1)$$

Notons que le terme de dérive  $d(n, x)$  satisfait, pour tout  $\mu, \lambda > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , les conditions d'invariance d'échelle (déterministes)

$$d(\mu n, \lambda x) = \mu^{-\beta} \lambda^\alpha d(n, x), \quad (1.1.2)$$

Pour une classe particulière de paramètres  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , notamment pour  $\rho > 0$  et  $\beta \geq 0$ , et sous des hypothèses supplémentaires sur le terme de diffusion, les auteurs établissent la récurrence ou la transience d'un tel processus et obtiennent le diagramme de transition de phase 1.2.

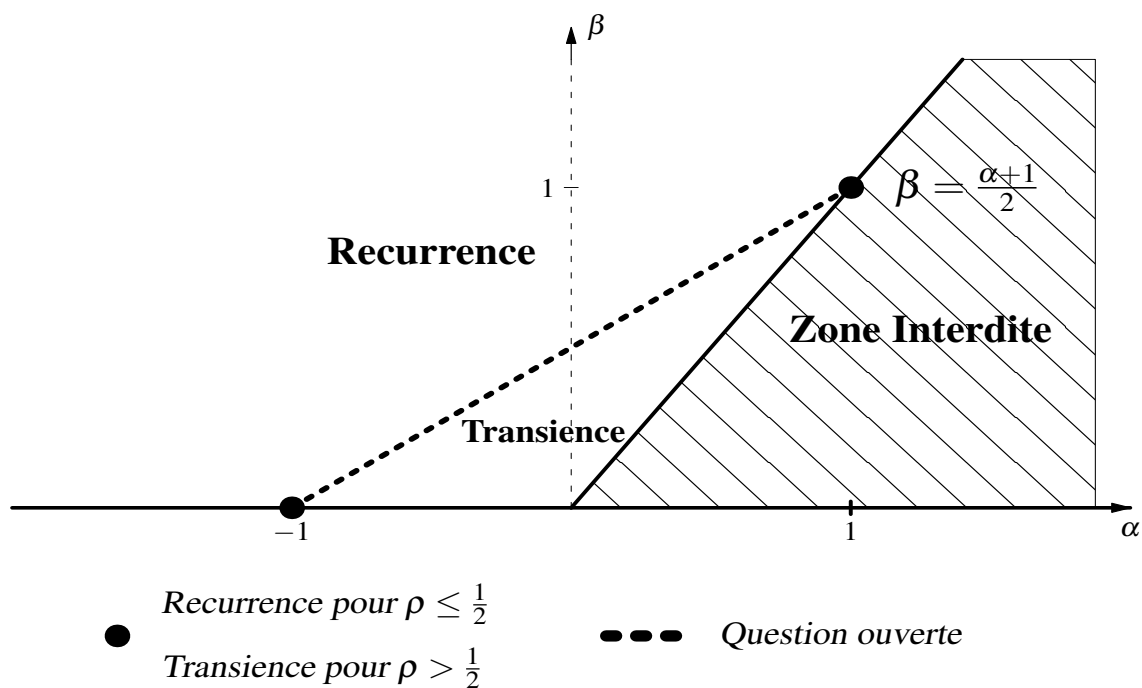


FIGURE 1.2 – Transition de phase : Menshikov et Volkov

Remarquons que la droite critique d'équation  $2\beta = \alpha + 1$  coïncide bien avec celle présentée dans (1.0.4) avec

$$h_d = 1/2, \quad h_t = -\beta \quad \text{et} \quad h_x = \alpha + 1. \quad (1.1.3)$$

De plus, cette droite différencie deux régimes (transience et récurrence) en accord avec ceux présentés dans le principe heuristique 1.1.

### 1.1.2 Le modèle d'urne de Friedman

Le cas  $\alpha = \beta = 1$  est une des principales motivations de Menshikov et Volkov. Cette situation est liée au modèle d'urne de Friedman (1949) qui a été particulièrement étudié. Présentons le modèle et les principaux résultats obtenus dans [2].

**Le modèle d'urne.** Une urne contient au temps  $n \geq 0$  un nombre  $B_n$  de boules blanches et un nombre  $N_n$  de boules noires. On choisit au hasard et avec remise une boule dans cette urne et l'on rajoute un nombre  $m \geq 0$  de boules de la même couleur et un nombre  $d \geq 0$  de boules de la couleur différente. On itère ensuite le procédé de manière indépendante.

Notons que pour  $d = 0$  on retrouve le modèle d'urne de Polya (1931). Le cas  $m = d$  étant trivial, nous supposons dans la suite que  $m \neq d$  et nous notons, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$X_n := \frac{B_n - N_n}{m - d} \quad \text{et} \quad \rho := \frac{m - d}{m + d}. \quad (1.1.4)$$

Par ailleurs, Friedman ne suppose pas que  $m$  et  $d$  soient nécessairement des entiers, mais plus généralement des réels positifs ou nuls.

**Theorem 1.1.1** (Freedman (65)).

1. Si  $\rho > 1/2$  alors il existe une variable aléatoire  $Z$  non dégénérée telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n^\rho} = Z \quad p.s. \quad (1.1.5)$$

2. Si  $\rho = 1/2$  alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n \log n}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{n \log n (\log n)^\varepsilon}} = 0 \quad p.s. \quad (1.1.6)$$

3. Si  $0 < \rho < 1/2$  alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1 - 2\rho}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2n (\log n)^\varepsilon}} = 0 \quad p.s. \quad (1.1.7)$$

4. Si  $\rho < 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\sqrt{n}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1 - 2\rho}\right) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2n \log \log n}} \leq |m - d| \quad p.s. \quad (1.1.8)$$

Il est naturel de se demander ce qu'il en est pour des généralisations continues du modèle de Menshikov et Volkov (1.1.1) et du modèle d'urne de Friedman et c'est ce qui fait en grande partie l'objet de cette thèse.

Nous verrons que nous obtenons des comportements asymptotiques similaires, et souvent plus précis, à ceux de [1, 2] dans le cadre des processus de diffusions en milieu déterministe ou en milieu aléatoire.



## 1.2 Extension à une diffusion en milieu déterministe

Nous généralisons dans la première partie de cette thèse les résultats de Menshikov et Volkov [1] à un processus de diffusion unidimensionnel dirigé par un mouvement brownien standard.

Ce travail, en collaboration avec Mihai Gradinaru, a fait l'objet d'un article [3] accepté pour publication aux *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*.

### 1.2.1 Présentation du modèle

**1. Le modèle.** Nous considérons un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \partial_x V_{\rho, \alpha, \beta}(t, X_t) dt, \quad X_{t_0} = x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0. \quad (1.2.1)$$

Le terme de diffusion  $B$  est un mouvement brownien standard sur la droite réelle et le potentiel (éventuellement singulier)  $V_{\rho, \alpha, \beta}$  associé à cette diffusion dépend du temps et est défini par

$$V_{\rho, \alpha, \beta}(t, x) := \begin{cases} -\frac{2\rho}{\alpha+1} t^{-\beta} |x|^{\alpha+1}, & \text{si } \alpha \neq -1, \\ -2\rho t^{-\beta} \log|x|, & \text{si } \alpha = -1. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Nous supposons que  $t_0 > 0$  car lorsque  $\beta < 0$  il y a une singularité en  $t = 0$ . Cependant, lorsque  $\beta < 1$ , la singularité est intégrable et cette difficulté peut être évacuée en utilisant un simple changement de temps. Le problème est plus délicat quand  $\beta \geq 1$  et l'existence du processus peut être relié, via un retournement du temps bien choisi, à l'existence d'un certain pont. On pourra consulter à ce propos [4, Exercices 2.17 et 2.12, pp. 384-387] pour plus de détails.

Remarquons de plus que lorsque  $\alpha \neq -1$  le milieu satisfait, pour tout  $\mu, \lambda > 0$ ,  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ , les conditions d'invariance d'échelle

$$V_{\rho, \alpha, \beta}(\mu t, \lambda x) = \mu^{-\beta} \lambda^{\alpha+1} V_{\rho, \alpha, \beta}(t, x). \quad (1.2.3)$$

L'équation (1.2.1) est donc un analogue du modèle discret de Menshikov et Volkov (1.1.1). Par ailleurs, cette famille de diffusions est assez riche. Elle contient, notamment, les processus de Bessel de dimension quelconque (voir, par exemple, [4, Chap. XI]) ayant pour équation

$$dX_t = dB_t + \frac{\rho}{X_t} dt, \quad (1.2.4)$$

ainsi que les processus d'Ornstein-Uhlenbeck ayant pour équation

$$dX_t = dB_t + \rho X_t dt. \quad (1.2.5)$$

Nous étudions de manière exhaustive, en terme des paramètres  $\rho, \alpha, \beta, x_0$  et  $t_0 > 0$ , l'existence, l'unicité et l'explosion des solutions de (1.2.1). De plus, nous décrivons entièrement le comportement asymptotique de ces processus. En particulier, nous déterminons les bonnes limites d'échelle et nous donnons des lois du type logarithme itéré.

De manière générale, quelques cas particuliers de ces processus sont assez bien compris. Décrivons succinctement quelques exemples avant de présenter une partie des résultats obtenus.

**2. Cas linéaire.** Lorsque  $\alpha = 1$  l'équation (1.2.1) peut s'écrire

$$dX_t = dB_t + \rho \frac{X_t}{t^\beta} dt, \quad X_{t_0} = x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0. \quad (1.2.6)$$

Il est bien connu que l'unique processus de diffusion solution est gaussien et admet une représentation explicite en terme d'intégrale de Wiener. Plus précisément, il est facile de montrer (voir [4, Proposition 2.3, p. 378]) que

$$\frac{X_t}{r(t)} = x_0 + \int_{t_0}^t \frac{dB_s}{r(s)}, \quad t \geq t_0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r(t) := t^\rho, & \text{si } \beta = 1, \\ r(t) := \exp\left(\rho \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}\right), & \text{si } \beta \neq 1. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Nous en déduisons, via le théorème de représentation des martingales [4, Théorèmes 1.7 et 1.6, pp. 181-182] et les propriétés asymptotiques du mouvement brownien (1.0.2), les deux théorèmes suivants :

**Théorème 1.2.1** (Cas du type urne de Friedman). *Considérons (1.2.6) et supposons que  $\beta = 1$ .*

1. *Si  $\rho > 1/2$  alors  $X$  est transient et*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^\rho} = G \quad p.s. \quad \text{avec} \quad G \sim \mathcal{N}\left(x_0, \frac{1}{2\rho - 1}\right). \quad (1.2.8)$$

2. *Si  $\rho = 1/2$  alors  $X$  est récurrent,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t \log t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log t \log \log t}} = 1 \quad p.s. \quad (1.2.9)$$

3. *Si  $\rho < 1/2$  alors  $X$  est récurrent,*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho}} \quad p.s. \quad (1.2.10)$$

**Théorème 1.2.2** (Cas linéaire général). *Considérons (1.2.6) et supposons que  $\rho \neq 0$  et  $\beta \neq 1$ .*

1. Si  $\beta > 1$  alors  $X$  est récurrent et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^\rho} = G \quad p.s. \quad \text{avec } G \sim \mathcal{N}\left(x_0, \frac{1}{2\rho - 1}\right). \quad (1.2.11)$$

2. Si  $\rho < 0$  et  $0 \leq \beta < 1$  alors  $X$  est récurrent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^{\beta/2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\rho|}\right) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^{\beta/2}(\log t)^{1/2}} = \left(\frac{\beta - 1}{\rho}\right)^{1/2} \quad p.s. \quad (1.2.12)$$

3. Si  $\rho > 0$  et  $\beta < 1$  alors  $X$  est transient,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\exp\left(\frac{\rho t^{1-\beta}}{1-\beta}\right)} = G \quad p.s. \quad \text{avec } G \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad (1.2.13)$$

où

$$m := x_0 \exp\left(\frac{\rho}{\beta - 1}\right) \quad \text{et} \quad \sigma^2 := \int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{2\rho s^{1-\beta}}{\beta - 1}\right) ds. \quad (1.2.14)$$

4. Si  $\rho < 0$  et  $\beta < 0$  alors  $X$  converge presque sûrement vers 0,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^{\beta/2}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\rho|}\right) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^{\beta/2}(\log t)^{1/2}} = \left(\frac{\beta - 1}{\rho}\right)^{1/2} \quad p.s. \quad (1.2.15)$$

Remarquons que le théorème 1.2.1 est un analogue en temps continu du théorème 1.1.1 obtenu par Freedman. Nous sommes par ailleurs plus précis en ce qui concerne les convergences presque sûres et en loi.

Notons aussi que lorsque le processus est transient, nous pouvons déterminer explicitement la probabilité de diverger en  $\pm\infty$ , probabilité qu'il sera à nouveau possible d'obtenir explicitement dans dans le cas homogène.

**3. Cas homogène.** Lorsque  $\beta = 0$  l'équation (1.2.1) peut s'écrire

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t)|X_t|^\alpha dt, \quad X_{t_0} = x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 > 0. \quad (1.2.16)$$

Les diffusions browniennes unidimensionnelles admettent une fonction d'échelle (voir, par exemple, [5, Chap. 5.5] pour une définition précise) et de nombreuses propriétés sur leur comportement peuvent être déduites en étudiant cette fonction.

Citons, par exemple, les critères d'existence, d'unicité et d'explosion dans Cherny et Engelbert [6], le théorème ergodique présenté dans [7] et le théorème de Motoo [8]. Énonçons ce dernier théorème :

**Théorème 1.2.3** (Motoo). *Soit  $X$  un processus fortement markovien et régulier, à valeurs dans  $(a, +\infty)$ , avec  $a \in [-\infty, +\infty)$ , homogène en temps et ergodique. Soit  $S$  sa fonction d'échelle. Alors pour toute fonction positive et croissante  $h$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{h(t)} \geq 1\right) = 0 \quad \text{ou} \quad = 1 \quad \text{selon que} \quad \int^{+\infty} \frac{dt}{S(h(t))} < +\infty \quad \text{ou} \quad = +\infty. \quad (1.2.17)$$

Considérons, à titre d'exemple, le cas où la fonction d'échelle  $S$  de la diffusion (1.2.16) est définie sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire dans le cas où  $\alpha > -1$ . Celle-ci est donnée par

$$S(x) := \int_0^x \exp\left(-\frac{2\rho}{\alpha+1}|x|^{\alpha+1}\right) dx. \quad (1.2.18)$$

La fonction d'échelle est, par définition, une fonction harmonique du processus de Markov. Plus précisément,  $\{X_t : t \geq t_0\}$  est solution de (1.2.16) si et seulement si  $\{M_t := S(X_t) : t \geq t_0\}$  est une martingale. Il existe alors un mouvement brownien standard  $B$  tel que

$$dM_t = S' \circ S^{-1}(M_t) dB_t. \quad (1.2.19)$$

Grâce à la construction de Ito-McKean [9] des diffusions homogènes en temps unidimensionnels, on peut exprimer la diffusion comme un brownien changé en temps (aléatoire) et en espace. Nous le ferons plus en détail dans la cas de la diffusion de Brox. Il est possible de déterminer si la diffusion est récurrente positive (existence d'une mesure invariante et stationnaire) et ceci est équivalent dans le cas que nous sommes en train de considérer à

$$m(\mathbb{R}) < +\infty \iff \rho < 0, \quad (1.2.20)$$

avec

$$m(dx) := \frac{dx}{S'(x)} = \exp\left(\frac{2\rho}{\alpha+1}|x|^{\alpha+1}\right) dx. \quad (1.2.21)$$

La mesure  $m$  est appelée mesure de vitesse du processus de Markov et nous obtenons ensuite, via les critères d'existence, d'unicité et d'explosion de Cherny et Engelbert, le théorème ergodique et le théorème de Motoo, le résultat suivant :

**Théorème 1.2.4.** *Si  $\rho < 0$  et  $\alpha > -1$  alors il existe une unique (en loi) diffusion  $X$ , solution faible de (1.2.16). De plus, cette diffusion est récurrente positive,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{m(dx)}{m(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{(\log t)^{1/(\alpha+1)}} = \left(\frac{\alpha+1}{2|\rho|}\right)^{1/(\alpha+1)} \quad p.s. \quad (1.2.22)$$

Cependant, lorsque la diffusion n'est plus ergodique, la fonction d'échelle n'est pas toujours d'une grande aide pour l'obtention d'un comportement asymptotique plus fin. On peut cependant citer le résultat suivant, présenté dans [10].

**Théorème 1.2.5** (Skorohod). *Si  $\rho > 0$  et  $-1 < \alpha < 1$  alors il existe une unique diffusion  $X$ , solution faible de (1.2.16). De plus cette diffusion est transiente et*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|X_t|}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = (\rho(1-\alpha))^{1/(1-\alpha)} \quad p.s. \quad (1.2.23)$$

### 1.2.2 Notations.

Avant de présenter les résultats généraux, il est nécessaire de faire quelques remarques et d'introduire quelques notations. Tout d'abord, par symétrie de l'équation (1.2.1) et par invariance d'échelle du mouvement brownien et du potentiel  $V_{\rho,\alpha,\beta}$ , nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que

$$x_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad t_0 = 1. \quad (1.2.24)$$

Ensuite, afin d'alléger les notations, posons

$$E(\alpha) := \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } \alpha > 1, \\ ]0, \infty[, & \text{si } \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (1.2.25)$$

et

$$V_{\rho,\alpha}(x) := \begin{cases} -\frac{2\rho}{\alpha+1} |x|^{\alpha+1}, & \text{si } \alpha \neq -1, \\ -2\rho \log|x|, & \text{si } \alpha = -1. \end{cases} \quad (1.2.26)$$

Puis introduisons, quand elles sont bien définies, les mesures de probabilité  $\gamma_\alpha$ ,  $\mu_{\rho,\alpha}$  et  $\pi_{\rho,\alpha}$  sur  $E(\alpha)$  dont les densités sont proportionnelles à

$$\gamma_\alpha(dx) \sim e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \mu_{\rho,\alpha}(dx) \sim e^{-\left[\frac{x^2}{2} + V_{\rho,\alpha}(x)\right]} \quad \text{et} \quad \pi_{\rho,\alpha}(dx) \sim e^{-V_{\rho,\alpha}(x)}. \quad (1.2.27)$$

Remarquons que lorsque  $\alpha > -1$  la mesure  $\gamma_\alpha$  n'est rien d'autre que la mesure gaussienne standard et lorsque  $\alpha \leq -1$  c'est la distribution de la valeur absolue d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

De plus, la mesure  $\mu_{\rho,\alpha}$  peut être vue, dans un certain sens, comme un mélange des lois  $\gamma_\alpha$  et  $\pi_{\rho,\alpha}$ . Nous définissons enfin le bon domaine de paramètres  $(\rho, \alpha, \beta)$  par

$$\mathcal{P} := ((-\infty, 0] \times (-1, +\infty) \times \mathbb{R}) \cup ([0, +\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.2.28)$$

### 1.2.3 Existence, unicité et explosion

Présentons les résultats généraux d'existence et d'unicité des solutions de l'équation (1.2.1) ainsi que la description précise du temps d'explosion en fonction des paramètres  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ . Nous rappelons que nous supposons (1.2.24) dans toute la suite.

**Théorème 1.2.6** (Existence et unicité). *Pour tout  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ , il existe un unique processus de diffusion  $X$ , solution forte de (1.2.1), tel que*

$X \in \mathbb{R}$	si $\alpha > -1$
$X \in [0, +\infty[$	si $\alpha = -1$
$X \in ]0, +\infty[$	si $\alpha < -1$

**Remarque 1.2.7.** *Nous montrons (voir, pour plus de détails, la seconde partie du présent manuscrit) que lorsque  $\alpha \leq -1$  il peut exister une infinité de solutions, non nécessairement markoviennes. Cependant, une fois imposé le signe de la diffusion, l'existence et l'unicité d'un processus de diffusion solution de (1.2.1) est assurée.*

**Théorème 1.2.8.** *Le temps d'existence  $\tau_e$  de la diffusion  $X$  ainsi construite vérifie*

$\mathbb{P}(\tau_e = +\infty) = 1$	si $\rho \leq 0$ ou $\alpha \leq 1$
$\mathbb{P}(\tau_e = +\infty) = 0$	si $\rho > 0$ , $\alpha > 1$ , $2\beta \leq \alpha + 1$
$\mathbb{P}(\tau_e = +\infty) \in ]0, 1[$	si $\rho > 0$ , $\alpha > 1$ , $2\beta > \alpha + 1$

**Remarque 1.2.9.** *Pour tout  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{P}$ , on peut montrer que les solutions de l'équation (1.2.1) sont définies jusqu'au temps d'atteinte de 0, qui est presque sûrement fini, et ne peuvent pas être prolongées après ce temps en général.*

Nous supposons donc, dans toute la suite, que  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}$  et (1.2.24). Dans la présentation, nous distinguons les deux régimes  $\rho > 0$  (répulsif) et  $\rho < 0$  (attractif).

### 1.2.4 Cas répulsif

Nous supposons dans cette section que  $\rho > 0$ . La famille de diffusions (1.2.1) admet alors une phase récurrente et une phase transiente (voir la figure 1.3) séparées par la frontière formée de la réunion des deux demi-droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  d'équations

$$\mathcal{D}_1 = \{\beta = 0, \alpha \leq -1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \left\{ \beta = \frac{\alpha+1}{2}, \alpha \geq -1 \right\}. \quad (1.2.29)$$

Nous obtenons des résultats similaires à [1] et à [2] (voir la figure 1.2 et le théorème 1.1.1). De plus, il est intéressant de constater que c'est la droite critique  $\beta = (\alpha + 1)/2$  et non les deux demi-droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  qui distinguent véritablement le comportement diffusif de la diffusion.

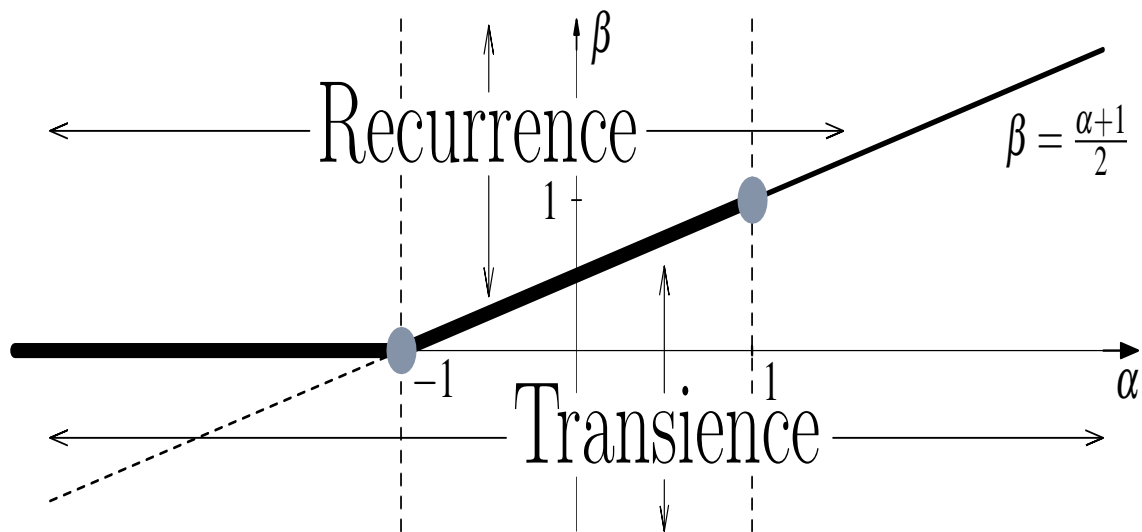


FIGURE 1.3 – Transition de phase : cas répulsif

**1. Au-dessus de la droite critique.** Nous montrons que si  $\beta > (\alpha + 1)/2$  alors, conditionnellement à l'ensemble de survie, elle se comporte asymptotiquement comme un mouvement brownien, pour  $\alpha > -1$ , et comme un mouvement brownien réfléchi, pour  $\alpha \leq -1$ .

En quelques sortes, le terme de dérive est asymptotiquement négligeable par rapport au terme de diffusion. A contrario, conditionnellement à l'explosion de la diffusion en temps fini, elle se comporte au voisinage du temps d'explosion comme le système dynamique déterministe

$$dx_t = -\frac{1}{2} \partial_x V_{\rho, \alpha, \frac{\alpha+1}{2}}(t, x_t) dt. \quad (1.2.30)$$

Plus précisément, nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.10.** *Conditionnellement à  $\{\tau_e = +\infty\}$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \gamma_\alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad p.s. \quad (1.2.31)$$

*Conditionnellement à  $\{\tau_e < +\infty\}$ ,*

$$|X_t| \underset{t \rightarrow \tau_e}{\sim} \frac{\tau_e^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}}}{(\rho(\alpha-1)(\tau_e-t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad p.s. \quad (1.2.32)$$

**Temps de survie et  $\delta$ -pont brownien.** Considérons  $b$ , l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$db_t = dB_t - \delta \frac{b_t}{T-t} dt, \quad 0 \leq t < T, \quad b_0 = x_0, \quad (1.2.33)$$

avec

$$T := \frac{1}{\gamma-1}, \quad \delta := \frac{\gamma}{2(\gamma-1)} \quad \text{et} \quad \gamma := \frac{2\beta}{\alpha+1}. \quad (1.2.34)$$

Ce processus, introduit par Mansuy (2004) dans [11] et nommé  $\delta$ -pont brownien, vérifie

$$\lim_{t \rightarrow T} b_t = 0 \quad p.s. \quad (1.2.35)$$

Notons que lorsque  $\delta = 1$  ce processus n'est rien d'autre qu'un pont brownien classique. Nous pouvons représenter la probabilité de survie de la diffusion en terme d'espérance d'une fonctionnelle de ce  $\delta$ -pont brownien.

**Théorème 1.2.11.** *Si  $\alpha \in (1, +\infty)$  alors*

$$\mathbb{P}(\tau_e = +\infty) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( \int_0^T \rho \operatorname{sgn}(b_u) |b_u|^\alpha dB_u - \int_0^T \frac{\rho^2 |b_u|^{2\alpha}}{2} du \right) \right] \in ]0, 1[. \quad (1.2.36)$$

Remarquons que la situation  $\mathbb{P}(\tau_e = +\infty) \in ]0, 1[$  ne peut pas apparaître dans le cas homogène (par trivialité de la tribu asymptotique) et c'est donc une particularité de l'inhomogénéité en temps de l'équation (1.2.1). En fait, nous montrons que le processus

$$\mathcal{S}_t := \exp \left( \int_0^t \rho \operatorname{sgn}(b_u) |b_u|^\alpha dB_u - \int_0^t \frac{\rho^2 |b_u|^{2\alpha}}{2} du \right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2.37)$$

est une martingale locale exponentielle qui n'est pas une martingale. Un des points importants pour démontrer le théorème précédent est de vérifier la continuité en norme  $L^1$ , au temps  $T$ , de cette martingale locale.

De plus, l'équation (1.2.36) permet d'estimer le temps de survie de la diffusion par une méthode de Monte-Carlo (voir la section 1.2.5).



**2. Sur la droite critique.** Supposons ici que  $\beta = (\alpha + 1)/2$ . Nous montrons que lorsque  $\alpha < 1$ , le comportement asymptotique de la diffusion est encore diffusif (normalisation en  $\sqrt{t}$ ) mais la loi limite n'est plus gaussienne. Cependant, la loi du logarithme itéré est encore satisfaite. Les termes de dérive et de diffusion sont donc, d'une certaine manière, du même ordre.

Ensuite, lorsque  $\alpha > 1$ , la diffusion se comporte encore comme le système dynamique déterministe (1.2.30) mais elle explose, cette fois-ci, en temps fini presque sûrement. Nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.12.** *Si  $-\infty < \alpha < 1$  alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu_{\rho, \alpha} \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad p.s. \quad (1.2.38)$$

*Si  $1 < \alpha < +\infty$  alors*

$$|X_t| \underset{t \rightarrow \tau_e}{\sim} \frac{\tau_e^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}}}{(\rho(\alpha-1)(\tau_e-t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad p.s. \quad (1.2.39)$$

**3. En-dessous de la droite critique.** Considérons, pour terminer, la situation où  $\beta < (\alpha + 1)/2$ . La diffusion se comporte comme le système dynamique déterministe sous-jacent

$$dx_t = -\frac{1}{2} \partial_x V_{\rho, \alpha, \beta}(t, x_t) dt. \quad (1.2.40)$$

Nous obtenons le théorème suivant, qui généralise le théorème 1.2.5.

**Théorème 1.2.13.** *Si  $-\infty < \alpha < 1$  alors*

$$|X_t| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \frac{\rho(1-\alpha)}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \quad p.s. \quad (1.2.41)$$

*Si  $1 < \alpha < +\infty$  alors*

$$|X_t| \underset{t \rightarrow \tau_e}{\sim} \frac{\tau_e^{\frac{\beta}{\alpha-1}}}{(\rho(\alpha-1)(\tau_e-t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad p.s. \quad (1.2.42)$$

### 1.2.5 Estimations numériques de la probabilité de survie

Nous donnons, dans cette section, quelques estimations numériques sur la probabilité de survie  $\mathbb{P}(\tau_e = \infty)$  de la diffusion (1.2.1). A cette fin, nous calculons l'espérance donnée en (1.2.36) par une méthode de Monte-Carlo, couplée à un schéma d'Euler pour approcher le  $\delta$ -pont brownien  $b$  et une méthode de Riemann pour estimer l'intégrale stochastique correspondante.

Nous représentons, dans la figure 1.4, les lignes de niveau de cette probabilité de survie, non pas en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ , mais en fonction de  $\alpha$  et  $\gamma$ , défini en (1.2.34).

Enfin, dans la figure 1.5, nous représentons les coupes à  $\alpha$  et  $\gamma$  fixés de ces lignes de niveau. Nous supposons de plus que  $\rho = 1$ .

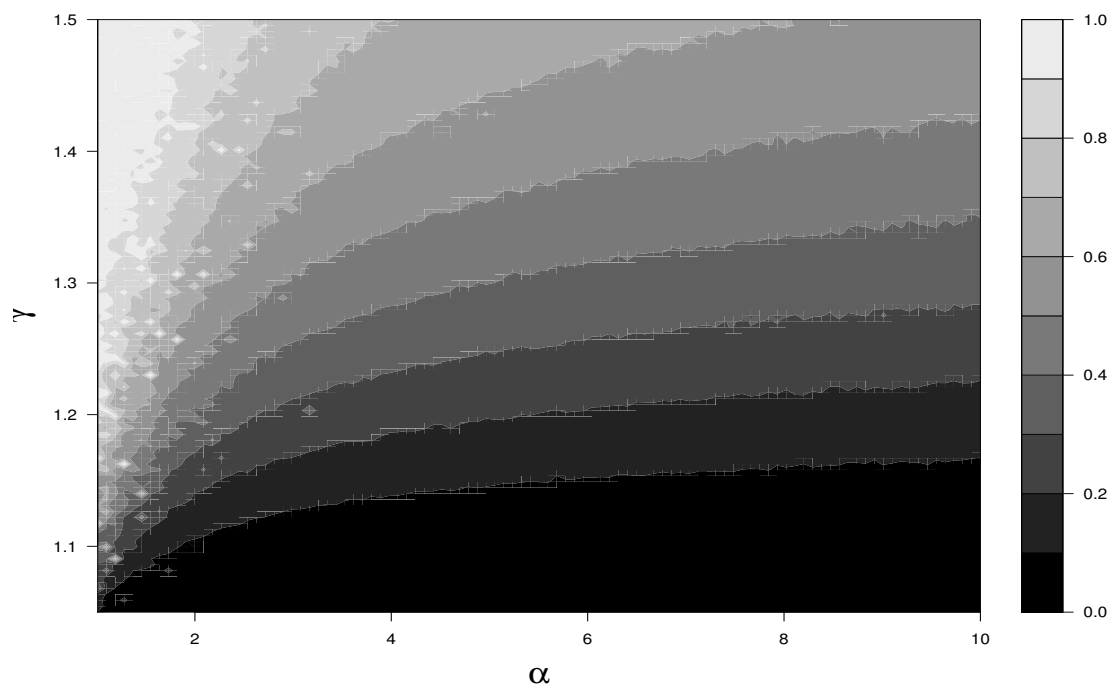
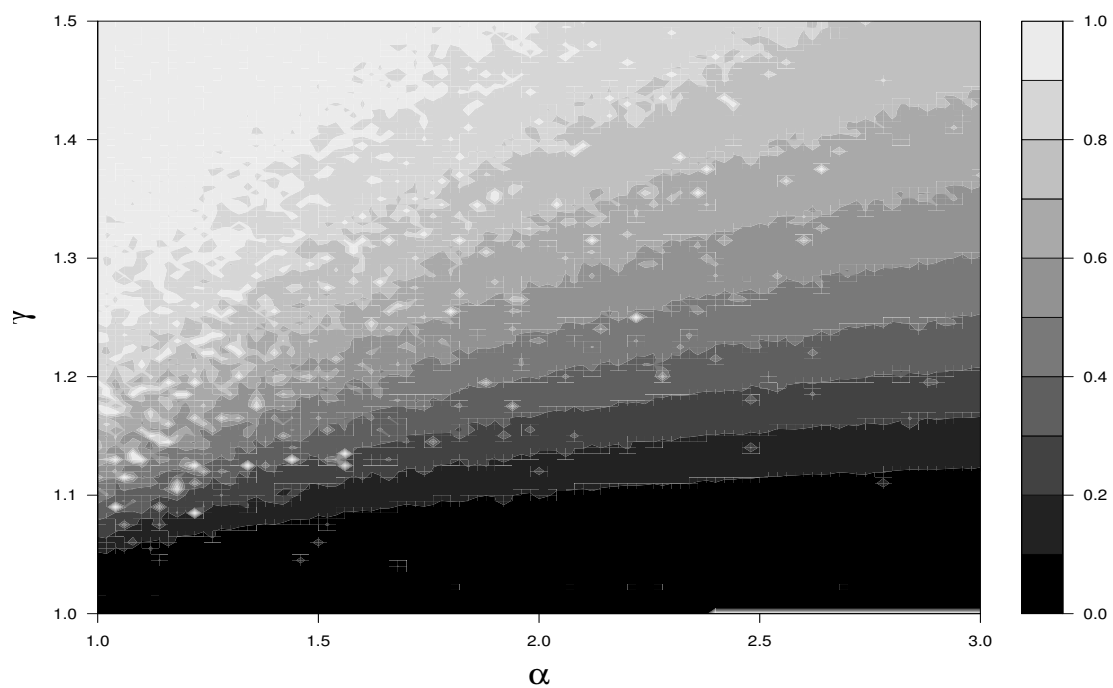


FIGURE 1.4 – Temps de survie : lignes de niveau

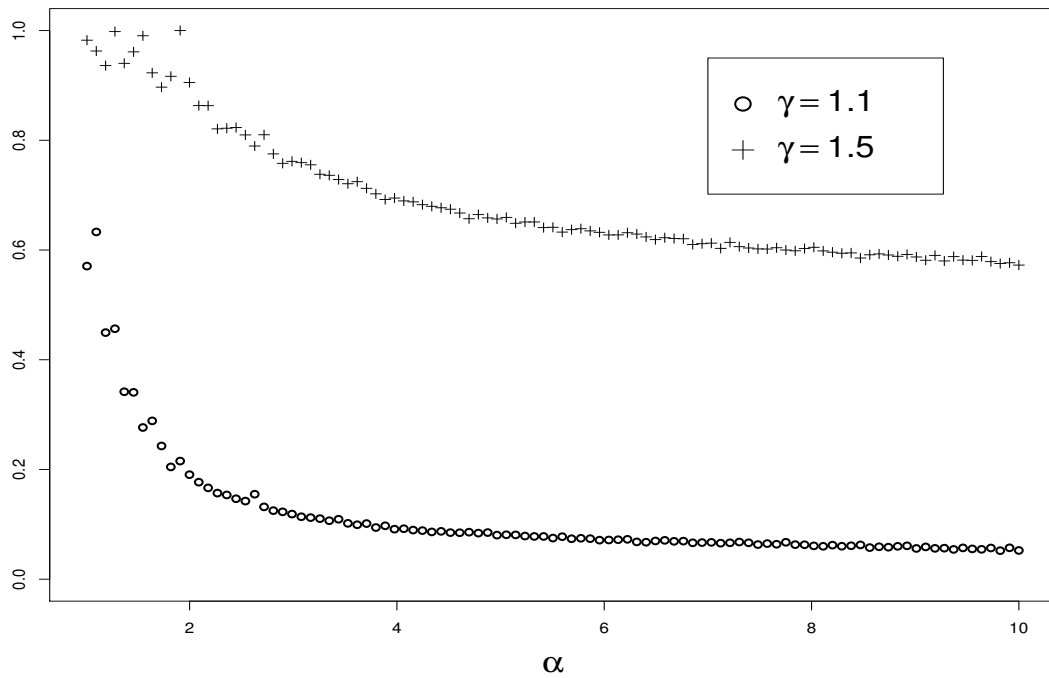
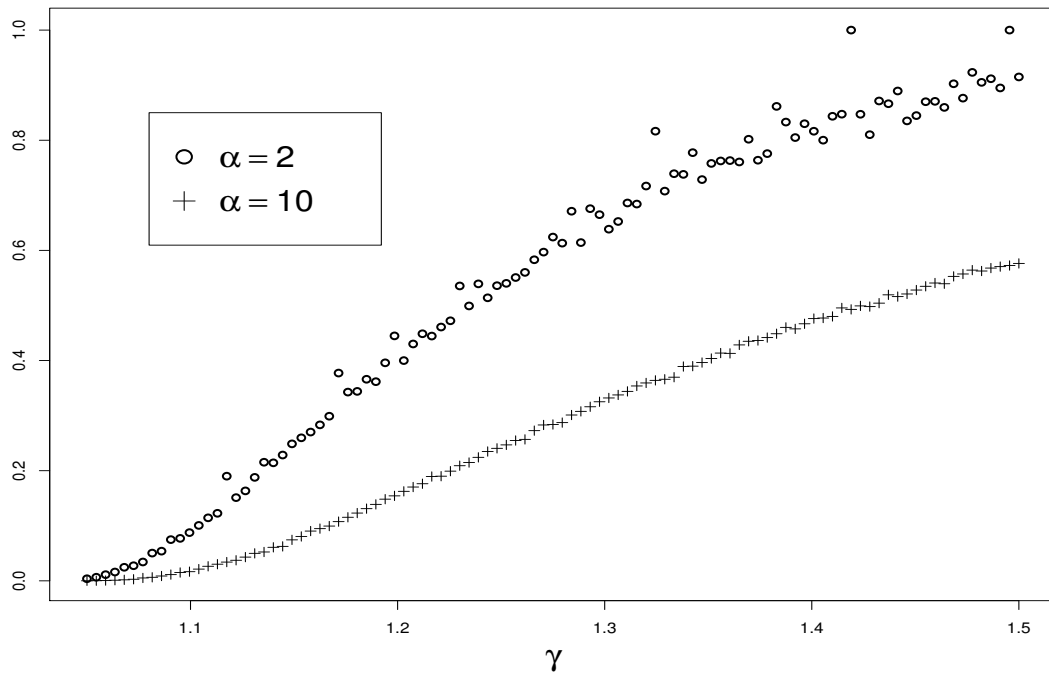


FIGURE 1.5 – Temps de survie : plans de coupe

### 1.2.6 Cas attractif

Nous supposons dans cette section que  $\rho < 0$ . Notons que cette situation n'a pas été traité dans [1]. La famille de diffusion (1.2.1) (voir la figure 1.6) admet une phase récurrente et une phase pour laquelle il y a convergence presque sûre vers 0, séparées par la droite d'équation  $\beta = 0$ .

Cependant, c'est une nouvelle fois la droite critique  $\beta = (\alpha + 1)/2$  qui permet de vraiment distinguer les différents types de comportements diffusifs.

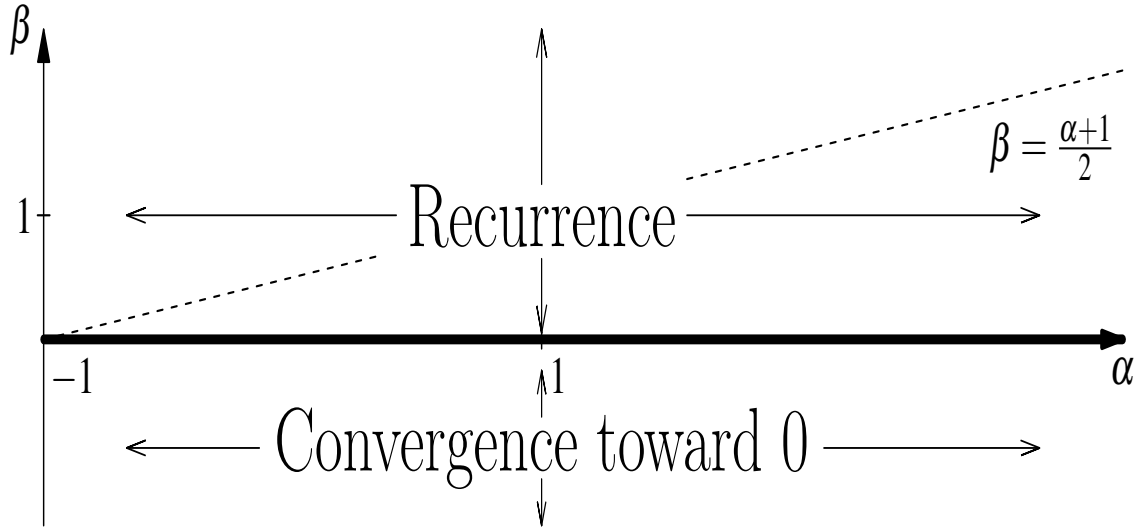


FIGURE 1.6 – Transition de phase : cas attractif

**1. Au-dessus de la droite critique.** Ce cas est identique au cas répulsif présenté dans le théorème 1.2.10 à ceci près que le temps d'existence est infini presque sûrement quelque soit  $\alpha > -1$ .

**Théorème 1.2.14.**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad p.s. \quad (1.2.43)$$

**2. Sur la droite critique.** Cette situation est encore identique au cas répulsif du théorème 1.2.12 lorsque  $\alpha < 1$ . Cependant, pour  $\alpha > 1$ , la loi du logarithme itéré n'est plus satisfaite.

**Théorème 1.2.15.** Si  $\alpha < 1$  alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu_{\rho, \alpha} \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad p.s. \quad (1.2.44)$$

Si  $1 < \alpha < +\infty$  alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu_{\rho, \alpha} \quad \text{et} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t^{1/2} (\log \log t)^{1/(\alpha+1)}} = \left( \frac{\alpha+1}{2|\rho|} \right)^{1/(\alpha+1)} \quad p.s. \quad (1.2.45)$$

**3. En-dessous de la droite critique.** C'est l'unique situation où le comportement de la diffusion est sous-diffusif. Le terme de dérive est dans ce cas prépondérant devant le terme de diffusion.

**Théorème 1.2.16.**

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^{\beta/(\alpha+1)}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \pi_{\rho, \alpha} \quad (1.2.46)$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{t^{\beta/(\alpha+1)} (\log t)^{1/(\alpha+1)}} = \left( \frac{\alpha + 1 - 2\beta}{2|\rho|} \right)^{1/(\alpha+1)} \quad p.s. \quad (1.2.47)$$

**Équation de recuit simulé.** Ainsi, lorsque  $\beta < 0$ , le processus est piégé en 0, minimum du potentiel, et converge vers celui-ci avec une vitesse polynomiale. Cela ne peut une nouvelle fois pas apparaître dans le cas homogène.

L'équation (1.2.1) est naturellement reliée à une équation de recuit simulé, similaire à celles présentées dans [12]. En effet, nous pouvons remarquer en utilisant la formule d'Ito qu'il existe un mouvement brownien standard  $B$  tel que

$$dY_t = \sigma(t) dB_t + \rho \operatorname{sgn}(Y_t) |Y_t|^\alpha dt, \quad (1.2.48)$$

où

$$Y_t := X_{\psi(t)}, \quad \text{avec } \psi(t) := ((1 - \beta)t)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (1.2.49)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \downarrow \sigma(t) = 0, \quad \text{avec } \sigma(t) := ((1 - \beta)t)^{\frac{\beta}{2(1-\beta)}}. \quad (1.2.50)$$

Des résultats similaires à ceux de [13], et souvent plus précis, sont obtenus sous des hypothèses différentes. Donnons pour en terminer avec le cas déterministe quelques idées de preuve.

### 1.2.7 Schéma des preuves

Les principales difficultés dans l'étude de cette diffusion proviennent de son caractère inhomogène en temps. Dans le cas singulier  $\alpha < 0$ , par exemple, l'existence en temps long d'une telle diffusion n'est pas claire et l'estimation du temps d'explosion pour  $\alpha > 1$  n'est plus aussi facile que dans le cas homogène.

En ce qui concerne les diffusions homogènes en dimension 1, il existe en effet de nombreux critères, utilisant principalement la fonction d'échelle associée à un tel processus, qui permettent de répondre à ces questions, et cela n'est plus le cas en dimension supérieure où pour des diffusions inhomogènes.

**1. Transformations d'échelle.** L'idée pour étudier un tel processus est donc de se ramener à l'étude d'une diffusion homogène que nous saurons mieux comprendre. Pour cela, nous utilisons de manière essentielle les propriétés d'auto-similarité de la diffusion  $B$  et les propriétés d'invariance d'échelle du potentiel  $V_{\rho,\alpha,\beta}$  données respectivement en (1.0.1) et en (1.2.3).

Ensuite, nous étudions, en fonctions des paramètres  $\rho, \alpha$  et  $\beta$ , une bonne transformation d'échelle  $X^\varphi$  de notre processus, tirant pleinement parti de ces invariances, et qui sera proche d'une diffusion homogène en temps. Les deux transformations d'échelle utilisées, apparaissant naturellement, sont données par

$$X_t^\varphi := \frac{X(\varphi(t))}{\sqrt{\varphi'(t)}}, \quad t \geq 0, \quad (1.2.51)$$

avec

$$\varphi \text{ vérifiant } \begin{cases} \varphi_e'(t) = \varphi_e(t), & \varphi_e(0) = 1, \quad t \geq 0, \\ \text{ou} \\ \varphi_Y'(t) = \varphi_Y^{\frac{2\beta}{\alpha+1}}(t), & \varphi_Y(0) = 1, \quad t \geq 0, \quad \text{pour } \alpha \neq -1. \end{cases} \quad (1.2.52)$$

Les principaux outils utilisés pour passer de l'étude d'une diffusion inhomogène à l'étude d'une diffusion homogène sont la transformation de Girsanov, les théorèmes de comparaison et le lemme fondamental suivant :

**Lemme 1.2.17.** Soient  $Z$  et  $H$  deux diffusions, uniques solutions faibles de

$$dZ_s = \sigma(s, Z_s) dB_t + d(s, Z_s) ds \quad \text{et} \quad dH_s = \sigma_\infty(H_s) dB_s + d_\infty(H_s) ds, \quad (1.2.53)$$

avec  $B$  un mouvement brownien standard et  $\sigma, \sigma_\infty, d$  et  $d_\infty$  des fonctions continues. Supposons que  $(Z, H)$  soit asymptotiquement homogène et  $\Pi$ -ergodique, dans le sens où

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \sigma(s, z) = \sigma_\infty(z) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} d(s, z) = d_\infty(z), \quad (1.2.54)$$

uniformément sur les compacts et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Pi. \quad (1.2.55)$$

Supposons de plus que  $Z$  est borné en probabilité, c'est-à-dire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que

$$\sup_{s \geq 0} \mathbb{P}(|Z_s| \geq r) < \varepsilon. \quad (1.2.56)$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Pi. \quad (1.2.57)$$

Donnons ensuite quelques idées de preuves pour l'étude de l'existence, de l'unicité et de l'explosion des solutions ainsi que pour les différents types de convergence en fonction de la position des paramètres  $(\alpha, \beta)$  vis-à-vis de la droite critique  $\beta = (\alpha + 1)/2$ .

**2. Existence, unicité et explosion.** En utilisant la transformation d'échelle associée au changement de temps  $\varphi_\gamma$  dans (1.2.52) nous étudions l'existence, l'unicité et l'explosion des solutions de l'équation (1.2.1). Plus précisément, via la transformation de Girsanov, nous montrons qu'il est équivalent d'étudier l'équation

$$dH_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(H_t)|H_t|^\alpha dt. \quad (1.2.58)$$

Nous utilisons ensuite les résultats de [6] pour étudier la diffusion équivalente. Cela a un intérêt particulier dans le cas singulier  $\alpha < 0$  que nous ne savons a priori pas étudier dans le cas inhomogène.

De plus, l'étude du temps d'explosion se fait à l'aide de bonnes fonctions de Lyapunov, par théorème de comparaison et par l'étude de la transformation d'échelle précédente.

**3. Au-dessus de la droite critique.** En utilisant le changement de temps exponentiel  $\varphi_e$  dans (1.2.52) nous montrons, à l'aide d'un théorème de comparaison, que la transformation d'échelle associée se comporte asymptotiquement comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$\frac{X(\varphi_e(t))}{\sqrt{\varphi_e(t)}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} U_t, \quad \text{avec } dU_t = dB_t - \frac{1}{2}U_t dt. \quad (1.2.59)$$

**4. Sur la droite critique.** La transformation d'échelle associée au changement de temps exponentiel donne dans ce cas une diffusion homogène. C'est le cas le plus simple dans notre étude qui pourtant était laissé ouvert dans [1].

$$\frac{X(\varphi_e(t))}{\sqrt{\varphi_e(t)}} = Z_t, \quad \text{avec } dZ_t = dB_t - \frac{1}{2}Z_t dt + \rho \operatorname{sgn}(Z_t)|Z_t|^\alpha dt. \quad (1.2.60)$$

**5. En-dessous de la droite critique.** Lorsque  $\rho < 0$ , nous utilisons la transformation d'échelle associée au changement de temps  $\varphi_\gamma$  et nous montrons que ce processus se comporte asymptotiquement comme la diffusion homogène  $H$  définie en (1.2.58) :

$$\frac{X(\varphi_\gamma(t))}{\varphi_\gamma^{\frac{\beta}{\alpha+1}}(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} H_t. \quad (1.2.61)$$

Par ailleurs, l'étude de la diffusion sous la droite critique et dans le cas répulsif  $\rho > 0$  se fait par d'autres techniques, notamment en étudiant d'une manière précise certaines sous-martingales associées à notre processus.

## 1.3 Motivations en milieu aléatoire

### 1.3.1 Introduction générale

Les marches aléatoires en milieu aléatoire, et leurs analogues en temps continu, les diffusions en milieu aléatoire, ont été introduites dans les années 70 et ont été étudiées dans un large pan de la littérature, sous des formes très variées.

En ce qui concerne les débuts de cette théorie, nous ferons notamment allusion à [14–18], dans le cas discret, et à [19–25], dans le cas continu. Dans cette dernière situation on citera par ailleurs de plus récents développements dans [26–33]. Pour un état de l’art de ce domaine on pourra aussi se référer à [34–36].

Les marches aléatoires en milieu aléatoire dépendant du temps ont été intensivement étudiées ces dernières années sous des nombreuses hypothèses. Initialement, des environnements spatio-temporels indépendants et identiquement distribués ont été introduits et considérés dans [37–40]. Des difficultés supplémentaires apparaissent quand les fluctuations de l’environnement sont indépendantes et identiquement distribuées en espace et markoviennes en temps (cas traité dans [41, 42]). Des difficultés encore plus grandes surviennent quand on considère des hypothèses plus générales de mélange (cas récemment étudié dans [43–45]).

Cependant, les diffusions en milieu aléatoire dépendant du temps ont très peu été étudiées. Nous pouvons quand même mentionner les travaux [46–48] allant dans cette direction.

Dans cette thèse, nous étudions dans la seconde partie des diffusions unidimensionnelles ayant quelques traits communs avec celles étudiées dans [3, 20]. Nous mettons notamment en lumière un phénomène de transition de phase similaire à celui présenté dans [1, 3] et en accord avec le principe heuristique 1.1.

### 1.3.2 Le modèle de Brox

Présentons tout d’abord un modèle fondamental : le modèle de Brox. Celui-ci considère dans [20] un processus de diffusion à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , solution de

$$dX_t = dX_t - \frac{1}{2} \theta'(X_t) dt, \quad X_0 = 0. \quad (1.3.1)$$

Le terme de diffusion  $B$  est un mouvement brownien standard indépendant du potentiel brownien standard  $\{\theta(x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Ce processus est un analogue continu des marches aléatoires en milieu aléatoire, amplement étudiées, et qui permettent, par exemple, de modéliser l’évolution de particules dans des milieux irréguliers.

Rigoureusement, une solution est un processus qui, conditionnellement à l’environnement brownien  $\theta$ , est une diffusion ayant pour générateur infinitésimal (dans sa forme canonique de Feller)

$$L_\theta = \frac{1}{2} \frac{d}{dm_\theta} \frac{d}{dS_\theta} = \frac{1}{2} e^{\theta(x)} \frac{d}{dx} \left( e^{-\theta(x)} \frac{d}{dx} \right). \quad (1.3.2)$$

La fonction d’échelle  $S_\theta$  et la mesure de vitesse  $m_\theta(dx)$  associées sont données sur  $\mathbb{R}$  par

$$S_\theta(x) := \int_0^x e^{\theta(y)} dy \quad \text{et} \quad m_\theta(dx) := \frac{dx}{S'_\theta(x)} = e^{-\theta(x)} dx. \quad (1.3.3)$$



Via la construction d'Ito-McKean des diffusions homogènes en dimension 1 présentée dans [9], l'existence faible, l'unicité en loi et la non-explosion d'une telle diffusion ne posent aucun souci.

En effet, on peut représenter la diffusion de Brox (1.3.1) comme un mouvement brownien changé d'échelle et de temps. Plus précisément, soit  $\{W_t : t \geq 0\}$  un mouvement brownien standard indépendant de  $\theta$  et  $T_\theta$  le changement de temps défini par

$$T_\theta(t) := \int_0^t e^{-2\theta(S_\theta^{-1}(W_u))} du, \quad t \geq 0. \quad (1.3.4)$$

L'unique solution faible de (1.3.1) est donnée par

$$X(t) := S_\theta^{-1}(W(T_\theta^{-1}(t))), \quad t \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Notons  $\mathbb{P}(\theta)$  la loi de  $X$  plongée dans l'environnement  $\theta$  (loi trempée) et (l'espérance étant prise sous la mesure de Wiener)

$$\widehat{\mathbb{P}} := \mathbb{E}_{\mathcal{W}}[\mathbb{P}(\theta)] \quad (\text{loi recuite}). \quad (1.3.6)$$

En utilisant la notion de vallée associée à l'environnement  $\theta$ , le temps local du mouvement brownien et leur propriété d'auto-similarité donnée, pour tout  $\lambda > 0$ , par

$$\{B_{\lambda t} : t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^{1/2} B_t : t \geq 0\} \quad \text{et} \quad \{\theta(\lambda x) : x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^{1/2} \theta(x) : x \in \mathbb{R}\}, \quad (1.3.7)$$

Brox démontre un phénomène de localisation de la diffusion  $\{X_t : t \geq 0\}$  dans une vallée typique du potentiel ainsi qu'un comportement sous-diffusif de l'ordre de  $(\log t)^2$ .

Les propriétés d'invariance d'échelle du potentiel  $\theta$  et du terme de diffusion  $B$  sont fondamentales pour obtenir ces résultats. Il est à noter que de nombreuses généralisations ont été obtenues pour des potentiels auto-similaires généraux dans [32, 49–52] par exemple.

Plus précisément, soit  $h$  un réel strictement positif. On appelle  $h$ -maximum de  $\theta$  un réel  $x$  tel qu'il existe  $a < x < b$  vérifiant  $\theta(a) \vee \theta(b) \leq \theta(x) - h$  et, pour tout  $y \in [a, b]$ ,  $\theta(y) \leq \theta(x)$ . On dit qu'un réel  $x$  est un  $h$ -minimum de  $\theta$  si  $x$  est un  $h$ -maximum de  $-\theta$ . De plus, si  $\theta$  est un mouvement brownien, presque sûrement, les  $h$ -maxima et les  $h$ -minima alternent, l'ensemble  $E_h$  des  $h$ -extrema n'admet pas de point d'accumulation et 0 n'est pas un extremum local.

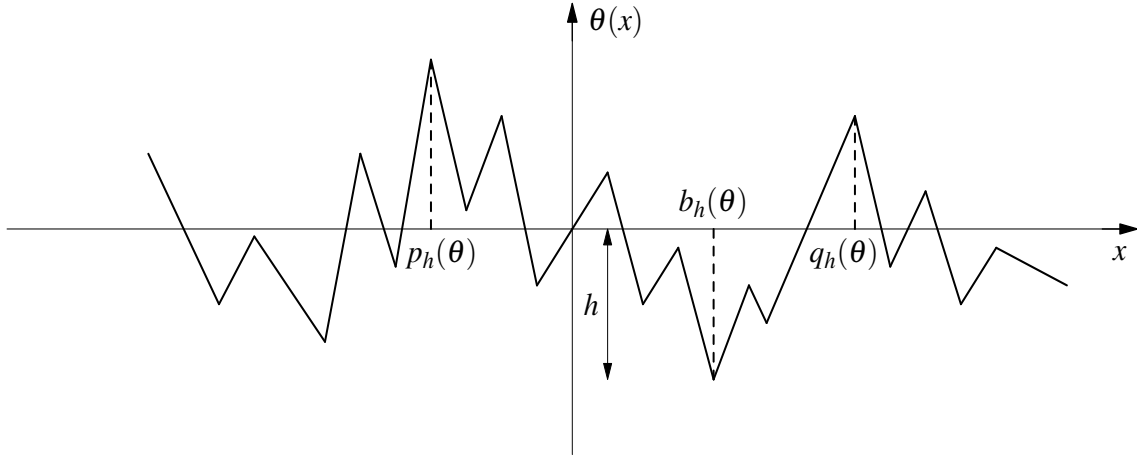
Ainsi, pour presque tout environnement brownien  $\theta$  (voir la figure 1.7) il existe un unique triplet  $(p_h(\theta), b_h(\theta), q_h(\theta))$  de  $h$ -extrema successifs tel que  $p_h(\theta)$  et  $q_h(\theta)$  soient des  $h$ -maximum,  $b_h(\theta)$  soit un  $h$ -minimum et  $p_h(\theta) < 0 < q_h(\theta)$ . Posons, pour tout milieu  $\theta$ ,  $\lambda > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$S_\lambda \theta(x) := \lambda^{-\frac{1}{2}} \theta(\lambda x). \quad (1.3.8)$$

Par des simples considérations géométriques, nous pouvons remarquer que

$$\frac{b_\lambda(\theta)}{\lambda^2} = b_1(S_{\lambda^2} \theta). \quad (1.3.9)$$

Notons par la suite  $\nu$ , la loi de la vallée standard  $b_1$  sous la mesure de Wiener. Brox montre alors que la diffusion  $\{X_t : t \geq 0\}$  est localisée au temps  $t$  dans la vallée standard de hauteur  $\log t$ .

FIGURE 1.7 – Vallées du potentiel brownien  $\theta$ 

**Théorème 1.3.1** (Brox (86)). *Pour presque tout environnement brownien  $\theta$ , on a la convergence en probabilité sous la loi trempée  $\mathbb{P}(\theta)$ ,*

$$\frac{X_t - b_{\log t}(\theta)}{\log^2(t)} = \frac{X_t}{\log^2(t)} - b_1(S_{\log^2 t} \theta) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}(\theta)} 0. \quad (1.3.10)$$

Par ailleurs, sous la loi recuite  $\widehat{\mathbb{P}}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{(\log t)^2} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \nu. \quad (1.3.11)$$

Notons que (1.3.11) est une simple conséquence de (1.3.10) ainsi que de l'invariance d'échelle du mouvement brownien. De plus, la mesure  $\nu$  a été explicité dans [17, 18].

**Théorème 1.3.2** (Golosov, Kesten).

$$\nu(dx) = \left( \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8} |x|\right) \right) dx. \quad (1.3.12)$$

### 1.3.3 Illustrations numériques du phénomène de localisation

Nous illustrons, dans la figure 1.8 suivante, le phénomène de localisation de la diffusion de Brox (1.3.1) dans les vallées du potentiel (voir le théorème 1.3.1). Nous simulons le potentiel ainsi que la trajectoire par un schéma d'Euler.

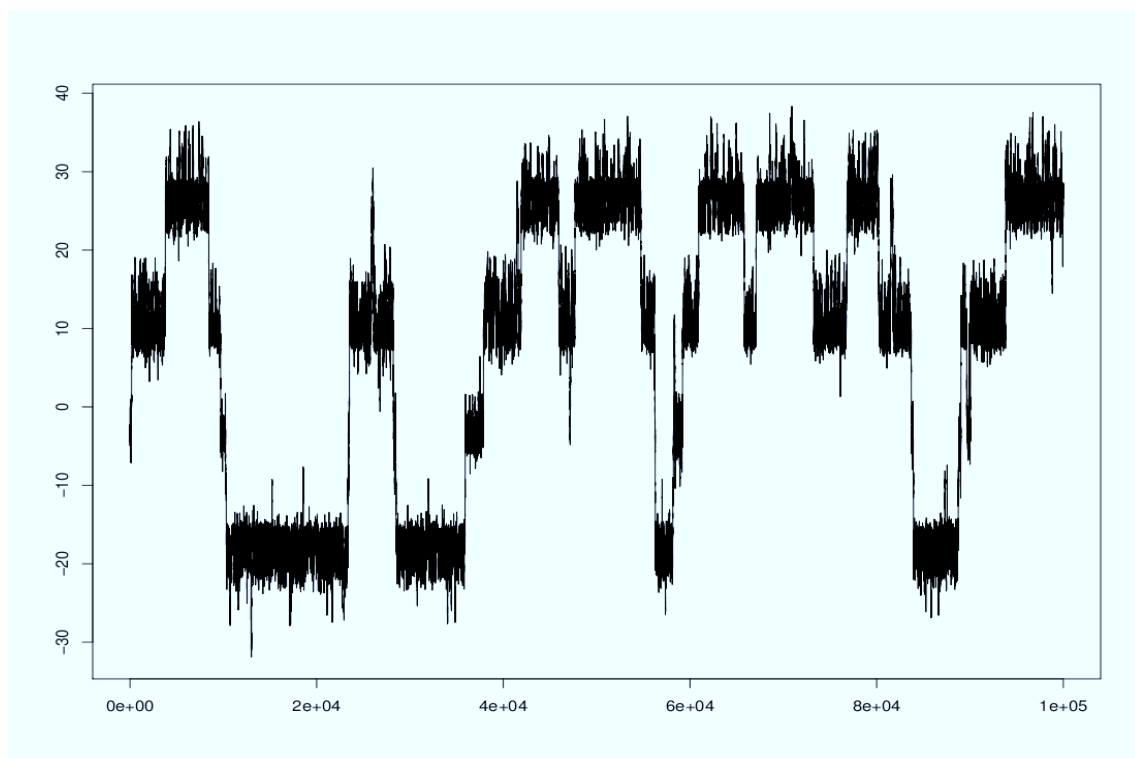
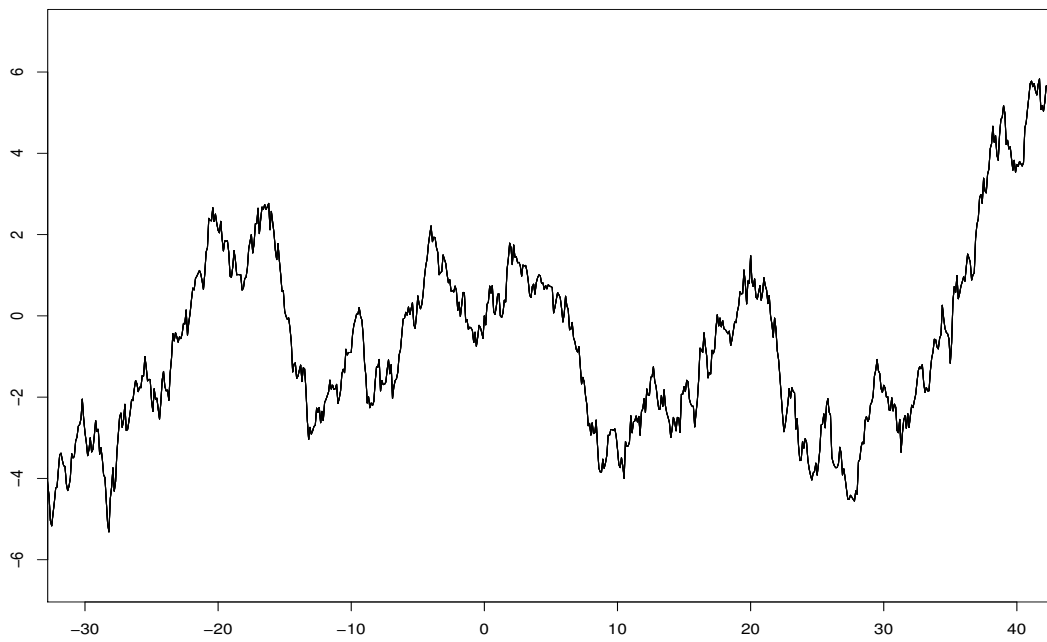


FIGURE 1.8 – Localisation de la diffusion de Brox dans un milieu donné

## 1.4 Diffusions dont le milieu aléatoire dépend du temps

Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous généralisons les résultats obtenus en milieu déterministe à un potentiel aléatoire brownien qui, heuristiquement, peut être vu comme une version randomisée du cas  $\alpha = -1/2$  dans (1.2.2).

Ce travail a été soumis pour publication et nous en présentons succinctement les principales idées dans cette introduction.

### 1.4.1 Le modèle de Brox inhomogène

Nous généralisons, en environnement aléatoire, la diffusion en milieu déterministe (1.2.1) ainsi que la diffusion de Brox (1.3.1), dans le cas inhomogène en temps.

**1. Le modèle.** Nous considérons un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , solution formelle de l'équation

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \frac{\theta'(X_t)}{t^\beta} dt, \quad X_s = x \in \mathbb{R}, \quad t \geq s > 0. \quad (1.4.1)$$

Le terme de diffusion  $B$  est encore un mouvement brownien standard indépendant du mouvement brownien standard  $\{\theta(x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Le potentiel ou milieu  $U_\theta$  est aléatoire et dépend cette fois-ci du temps. Il est donné, pour tout  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$  par

$$U_\theta(t, x) := \frac{\theta(x)}{t^\beta}. \quad (1.4.2)$$

Rigoureusement, une solution est un processus qui, conditionnellement à l'environnement brownien  $\theta$ , a pour générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{1}{2} e^{U_\theta(t, x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-U_\theta(t, x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.4.3)$$

Notons que, contrairement au cas homogène (voir (1.2.18) et (1.3.3) pour plus de détails), l'existence d'une telle diffusion (du moins en temps long) n'est pas une chose aisée à montrer car il n'existe plus de fonction d'échelle.

De plus, remarquons que cette équation est une extension en environnement aléatoire de l'équation (1.2.1), dans le sens où le potentiel satisfait des conditions d'auto-similarité analogues à (1.2.3) avec  $\alpha = -1/2$ . En effet, pour tout  $\lambda, \mu > 0$ , presque tout milieu brownien  $\theta$  et pour tout  $t > 0, x \in \mathbb{R}$ ,

$$U_\theta(\mu t, x) = \mu^{-\beta} U_\theta(t, x) \quad (1.4.4)$$

et

$$\{U(t, \lambda x) : x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^{1/2} U(t, x) : x \in \mathbb{R}\}. \quad (1.4.5)$$

L'unique différence est donc que l'invariance d'échelle en espace est déterministe dans (1.2.3) et aléatoire (le temps étant gelé) dans (1.4.5).

**2. Analogue déterministe.** L'équation (1.4.1) est donc similaire à l'équation (1.2.1) dans le cas où  $\alpha = -1/2$  et, par exemple,  $\rho = -1/4$ . Son pendant déterministe s'écrit

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \frac{W'(X_t)}{t^\beta} dt, \quad X_s = x \in \mathbb{R}, \quad t \geq s > 0, \quad (1.4.6)$$

avec

$$W(x) = |x|^{1/2}. \quad (1.4.7)$$

Rappelons les résultats obtenus pour l'équation (1.4.6) et les méthodes employées. Dans la première partie de ce manuscrit, nous montrons les convergences suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \begin{cases} \mathcal{N}(0, 1), & \text{si } \beta > 1/4, \\ k_c^{-1} e^{-\left[\frac{x^2}{2} + W(x)\right]} dx, & \text{si } \beta = 1/4, \end{cases} \quad (1.4.8)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t^{2\beta}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} k_u^{-1} e^{-W(x)} dx, \quad \text{si } \beta < 1/4, \quad (1.4.9)$$

$k_c$  et  $k_u$  étant deux constantes de normalisation strictement positives.

Cela illustre, dans le cas où  $\alpha = -1/2$ , un phénomène de transition de phase plus générale (voir la figure 1.6 pour une vue générale). L'idée est d'étudier une bonne transformation d'échelle de notre processus. Plus précisément, pour démontrer les convergences dans (1.4.8), nous étudions la transformation d'échelle associée au changement de temps exponentiel (voir (1.2.59) et (1.2.60)). Il suffit alors d'étudier l'équation différentielle stochastique

$$dZ_t = dB_t - \frac{1}{2} [Z_t + e^{-rt} W'(Z_t)] dt, \quad Z_0 = z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (1.4.10)$$

avec

$$Z_t := \frac{X(e^t)}{e^{t/2}}, \quad t \geq 0 \quad \text{et} \quad r := \beta - \frac{1}{4}. \quad (1.4.11)$$

Il faut s'attendre à obtenir des résultats similaires à ceux présentés dans (1.4.8) en remplaçant  $W$  par une trajectoire brownienne  $\theta$  dans (1.4.6). En appliquant la même méthode, il suffirait donc d'étudier une équation auxiliaire qui sera le pendant de l'équation (1.4.10) en environnement aléatoire. Il est alors naturel de se demander si, de même que pour la diffusion (1.4.6), le point  $\beta = 1/4$  est encore un point critique du comportement en loi du processus. En particulier, nous répondrons aux questions suivantes :

1. A-t-on un comportement diffusif lorsque  $\beta \geq 1/4$  ?
2. Le milieu aléatoire disparaît-il asymptotiquement et a-t-on convergence vers une loi normale centrée réduite lorsque  $\beta > 1/4$  ?
3. A-t-on une convergence vers une mesure non gaussienne, dépendant de l'environnement, lorsque  $\beta = 1/4$  ?

### 1.4.2 Fluctuations du potentiel d'Ornstein-Uhlenbeck

Présentons tout d'abord l'analogie en environnement aléatoire de l'équation (1.4.10). Notons que contrairement à (1.4.10) celle-ci n'est plus homogène en temps, mais hérite cependant de bonnes propriétés, le potentiel étant, en quelques sortes, homogène en loi.

**1. Équation auxiliaire.** De la même manière que dans (1.2.59) et (1.2.60), nous préférons étudier la transformation d'échelle de la diffusion (1.4.6) associée au changement de temps exponentiel. Nous pouvons montrer par de simples calculs que

$$dZ_t = dB_t - \frac{1}{2} \partial_x V_\theta(t, Z_t) dt, \quad Z_0 = z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (1.4.12)$$

avec

$$V_\theta(t, x) := \frac{x^2}{2} + e^{-rt} T_t \theta(x), \quad r := \beta - \frac{1}{4}, \quad (1.4.13)$$

$$T_t \theta(\star) := S_{e^{t/2}} \theta(\star) = e^{-t/4} \theta(e^{t/2} \star) \quad (1.4.14)$$

et

$$Z_t = \frac{X(e^t)}{e^{t/2}}, \quad t \geq 0. \quad (1.4.15)$$

La diffusion  $B$  est un mouvement brownien standard indépendant du mouvement brownien standard  $\{\theta(x) : x \in \mathbb{R}\}$  et le potentiel  $V_\theta$  (voir la figure 1.9) est aléatoire et dépend du temps.

Notons qu'ici le temps et la position ne sont plus découplés, contrairement à la diffusion de Brox inhomogène (1.4.1).

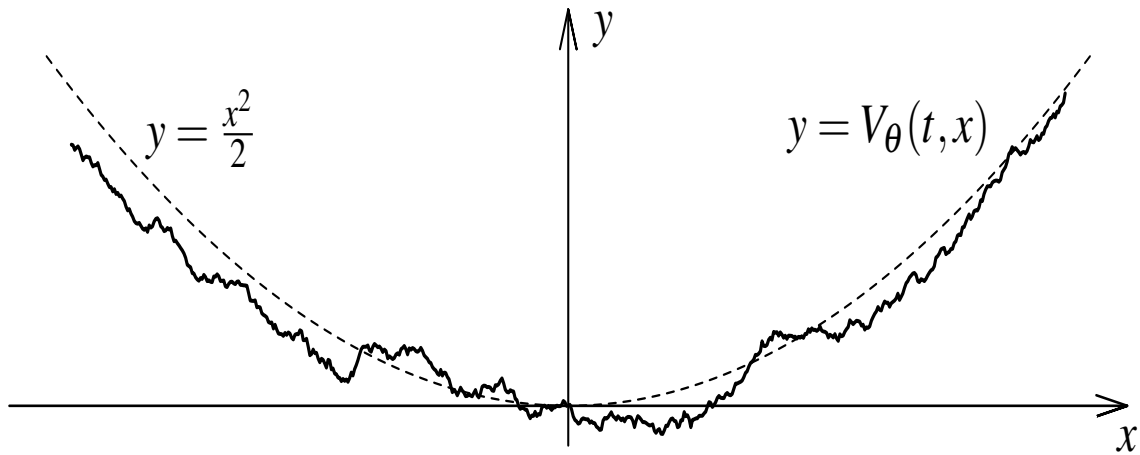


FIGURE 1.9 – Fluctuations du potentiel  $V_\theta(t, \star)$

Rigoureusement, une solution de (1.4.12) est un processus  $Z$  qui, conditionnellement à l'environnement brownien  $\theta$ , a pour générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}_\theta = \frac{1}{2} e^{V_\theta(t,x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-V_\theta(t,x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.4.16)$$

Remarquons que tout ne se passe pas aussi bien que pour l'équation en milieu déterministe (1.4.10) car même dans le cas critique  $r = 0$ , l'équation (1.4.12) n'est plus homogène en temps. En effet, l'égalité dans (1.4.5) est en loi alors qu'elle était effective dans (1.2.3). Cependant, l'équation (1.4.12) n'est rien d'autre que l'équation (1.4.10) pour  $\theta = W$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{T_t \theta(x) : t \in \mathbb{R}\}$  est, sous la mesure de Wiener, un processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire de mesure invariante  $\mathcal{N}(0, x)$ , solution de

$$dU_t(x) = dW_t(x) - \frac{1}{4}U_t(x) dt, \quad U_0(x) = \theta(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4.17)$$

avec  $\{W_t(x) : t, x \in \mathbb{R}\}$  est un champs gaussien centré dont la fonction de covariance est donnée, pour tout  $s, t, x, y \in \mathbb{R}$ , par

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}} [W_s(y)W_t(x)] = \begin{cases} \frac{1}{2}(y \wedge x)(s \wedge t), & \text{si } xy \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, nous pouvons remarquer (par invariance d'échelle du mouvement brownien) que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\{T_t \theta(x) : x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\theta(x) : x \in \mathbb{R}\}. \quad (1.4.18)$$

Nous montrons de plus dans la deuxième partie du présent manuscrit (cette propriété étant cruciale) que la famille  $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$  induit une structure de système dynamique ergodique sur l'espace de Wiener.

Notons que les fluctuations du potentiel, le temps  $t$  étant figé, sont browniennes et de loi  $\mathcal{N}(0, e^{-2rt}x)$ . Cependant, elles ne sont pas bornées en temps long lorsque  $r = 0$  et  $x \neq 0$ , et elles tendent vers 0 asymptotiquement lorsque  $r > 0$ . En effet, pour presque tout environnement brownien  $\theta$  et tout  $x \neq 0$ ,

$$\limsup_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{|T_t \theta(x)|}{\sqrt{2|x| \log |t|}} = 1. \quad (1.4.19)$$

Intuitivement, on peut voir  $Z$  comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont le potentiel est perturbé par le système dynamique

$$\{e^{-rt} T_t \theta : t \geq 0\}. \quad (1.4.20)$$

**2. Existence, unicité et non-explosion.** Nous montrons qu'il existe un unique processus de Feller, solution de (1.4.12), admettant des densités de transition mesurables par rapport à l'environnement et satisfaisant localement la minoration gaussienne d'Aronson.

**Théorème 1.4.1.** *Pour tout  $r, z \in \mathbb{R}$  et presque toute trajectoire brownienne  $\theta$ , il existe un unique (en loi) processus de Feller inhomogène  $Z$ , défini pour tout  $t \geq 0$ , solution de (1.4.12). De plus, ce processus de Markov admet des densités de transition  $p_\theta(s, z, t, x)$  mesurable par rapport à  $(\theta, s, t, z, x) \in \Theta \times \{t > s \geq 0\} \times \mathbb{R}^2$  et satisfaisant localement, pour presque tout  $\theta$ , la minoration gaussienne d'Aronson : pour presque tout  $\theta$ , pour tout  $T > 0$  et tout compact  $C \subset \mathbb{R}$ , il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $0 \leq s < t \leq T$  et  $z, x \in C$ ,*

$$p_\theta(s, z, t, x) \geq \frac{1}{\sqrt{M(t-s)}} \exp\left(-M \frac{|x-z|^2}{t-s}\right). \quad (1.4.21)$$

**3. Disparition du milieu.** Dans le cas où  $r > 0$ , le milieu aléatoire disparaît asymptotiquement et la diffusion (1.4.12) se comporte asymptotiquement comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous-jacent d'équation

$$dU_t = dB_t - \frac{1}{2}U_t dt. \quad (1.4.22)$$

**Théorème 1.4.2.** *Pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1). \quad (1.4.23)$$

**4. Mesure aléatoire quasi-invariante.** Dans la situation où  $r = 0$  le potentiel de la diffusion (1.4.12) n'est plus asymptotiquement celui du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (1.4.22). Afin de présenter les résultats obtenus, nous devons d'abord introduire quelques définitions et notations.

**Définitions et notations.** Nous dirons que  $\mu$  est une mesure de probabilité aléatoire sur  $\mathbb{R}$ , définie sur l'espace de Wiener si, pour presque toute trajectoire brownienne  $\theta$ ,  $\mu_\theta$  est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et si  $\theta \mapsto \mu_\theta(A)$  est mesurable pour tout borélien  $A$ .

Nous poserons dans ce cas (l'espérance étant prise sous la mesure de Wiener)

$$\hat{\mu} := \mathbb{E}_W[\mu_\theta]. \quad (1.4.24)$$

Définissons de plus, pour tout  $0 < \alpha < 1$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$U_\alpha(x) := \exp\left(\alpha \frac{x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad V_\alpha(x) := \exp(|x|^\alpha), \quad (1.4.25)$$

et introduisons alors les normes ( $U_\alpha$ -variation totale et  $V_\alpha$ -variation totale) sur l'espace  $\mathcal{M}$  des mesures signées  $\nu$  sur  $\mathbb{R}$  définies par

$$\|\nu\|_{U_\alpha} := \sup_{|f| \leq U_\alpha} |\nu(f)| \quad \text{et} \quad \|\nu\|_{V_\alpha} := \sup_{|f| \leq V_\alpha} |\nu(f)|, \quad (1.4.26)$$

le supremum étant pris sur toutes les fonctions mesurables bornées.



Soit  $\mathcal{M}_1$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et posons

$$\mathcal{M}_{U_\alpha} := \{\nu \in \mathcal{M} : \|\nu\|_{U_\alpha} < \infty\}, \quad \mathcal{M}_{V_\alpha} := \{\nu \in \mathcal{M} : \|\nu\|_{V_\alpha} < \infty\}. \quad (1.4.27)$$

et

$$\mathcal{M}_{1,U_\alpha} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{U_\alpha}, \quad \mathcal{M}_{1,V_\alpha} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{V_\alpha}. \quad (1.4.28)$$

Notons enfin  $\{P_{s,t}(\theta) : t \geq s \geq 0\}$  le semi-groupe inhomogène en temps associé à la diffusion (1.4.12) et posons

$$\widehat{P}_{s,t} := \mathbb{E}_{\mathcal{W}}[P_{s,t}(\theta)]. \quad (1.4.29)$$

Nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 1.4.3.** *Il existe une unique (à un ensemble de mesure nulle près) mesure de probabilité aléatoire sur  $\mathbb{R}$  définie sur l'espace de Wiener telle que, pour tout  $t \geq 0$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ ,*

$$\mu_\theta P_{0,t}(\theta) = \mu_{T_t\theta}. \quad (1.4.30)$$

*De plus, pour tout  $\alpha \in (0, 1)$ , la mesure quasi-invariante  $\mu$  satisfait, pour presque tout environnement brownien  $\theta$ ,*

$$\mu_\theta \in \mathcal{M}_{1,U_\alpha} \quad \text{et} \quad \widehat{\mu} \in \mathcal{M}_{1,V_\alpha}. \quad (1.4.31)$$

*Par ailleurs, il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $\nu \in \mathcal{M}_{1,U_\alpha}$ ,  $\widehat{\nu} \in \mathcal{M}_{1,V_\alpha}$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu P_{0,t}(\theta) - \mu_{T_t\theta}\|_{U_\alpha})}{t} \leq -\lambda \quad (1.4.32)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\widehat{\nu} \widehat{P}_{0,t} - \widehat{\mu}\|_{V_\alpha} = 0. \quad (1.4.33)$$

Notons que l'équation (1.4.31) fournit des informations sur la queue de la mesure aléatoire  $\mu$  ainsi que sur celle de son équivalent recuit  $\widehat{\mu}$  : pour tout  $0 < \alpha < 1$  et pour presque tout environnement  $\theta$ , ils existent deux constantes positives  $C(\theta)$  et  $\widehat{C} > 0$  telles que, pour tout  $R \geq 0$ ,

$$\mu_\theta((R, \infty)) \leq C(\theta) \exp\left(-\alpha \frac{R^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}((R, \infty)) \leq \widehat{C} \exp(-R^\alpha). \quad (1.4.34)$$

Remarquons de plus que la vitesse de convergence sous une loi trempée est exponentielle et ne dépend pas de l'environnement. Cependant, l'obtention de la vitesse de convergence sous la loi recuite semble plus délicat à obtenir.

### 1.4.3 Approximations numériques des distributions stationnaires

Nous illustrons les théorèmes 1.4.2 et 1.4.3 en approchant numériquement les densités de transition de la diffusion (1.4.12). Nous utilisons une méthode de Monte-Carlo en simulant l'environnement ainsi que les trajectoires par un schéma d'Euler.

**1. Cas sur-critique.** Lorsque  $r > 0$  nous mettons en évidence la convergence en loi, l'environnement étant fixé, vers une loi normale centrée réduite. Nous représentons dans la figure 1.10 la densité au temps  $T = 7$  de la diffusion avec  $Z_0 = 0$  et  $r = 1$ , que nous comparons avec la densité de la loi normale centrée réduite, en pointillés.

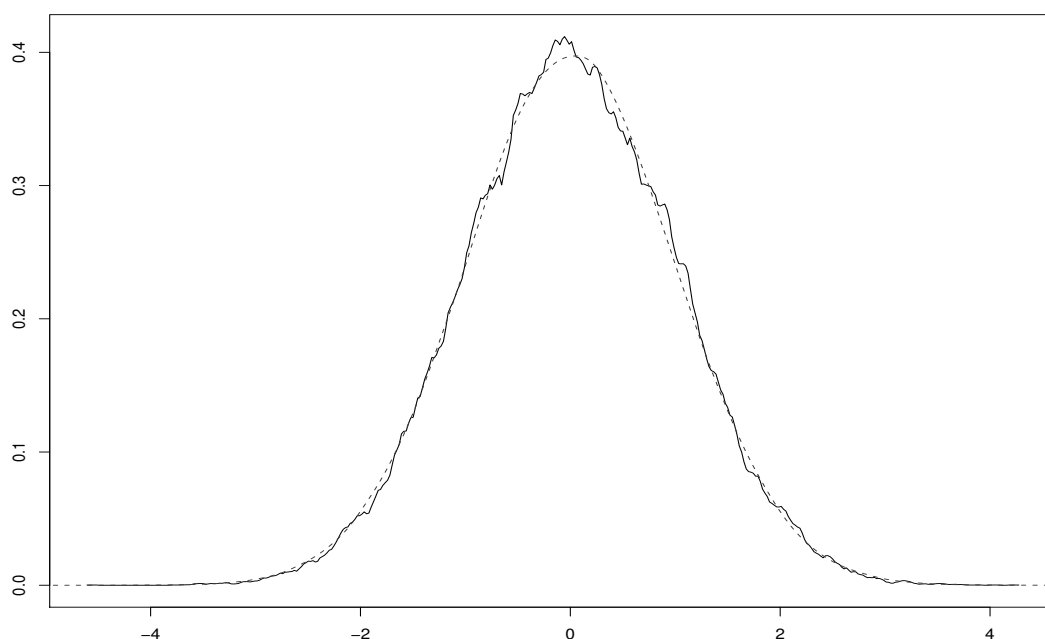


FIGURE 1.10 – Convergence vers une loi normale centrée réduite

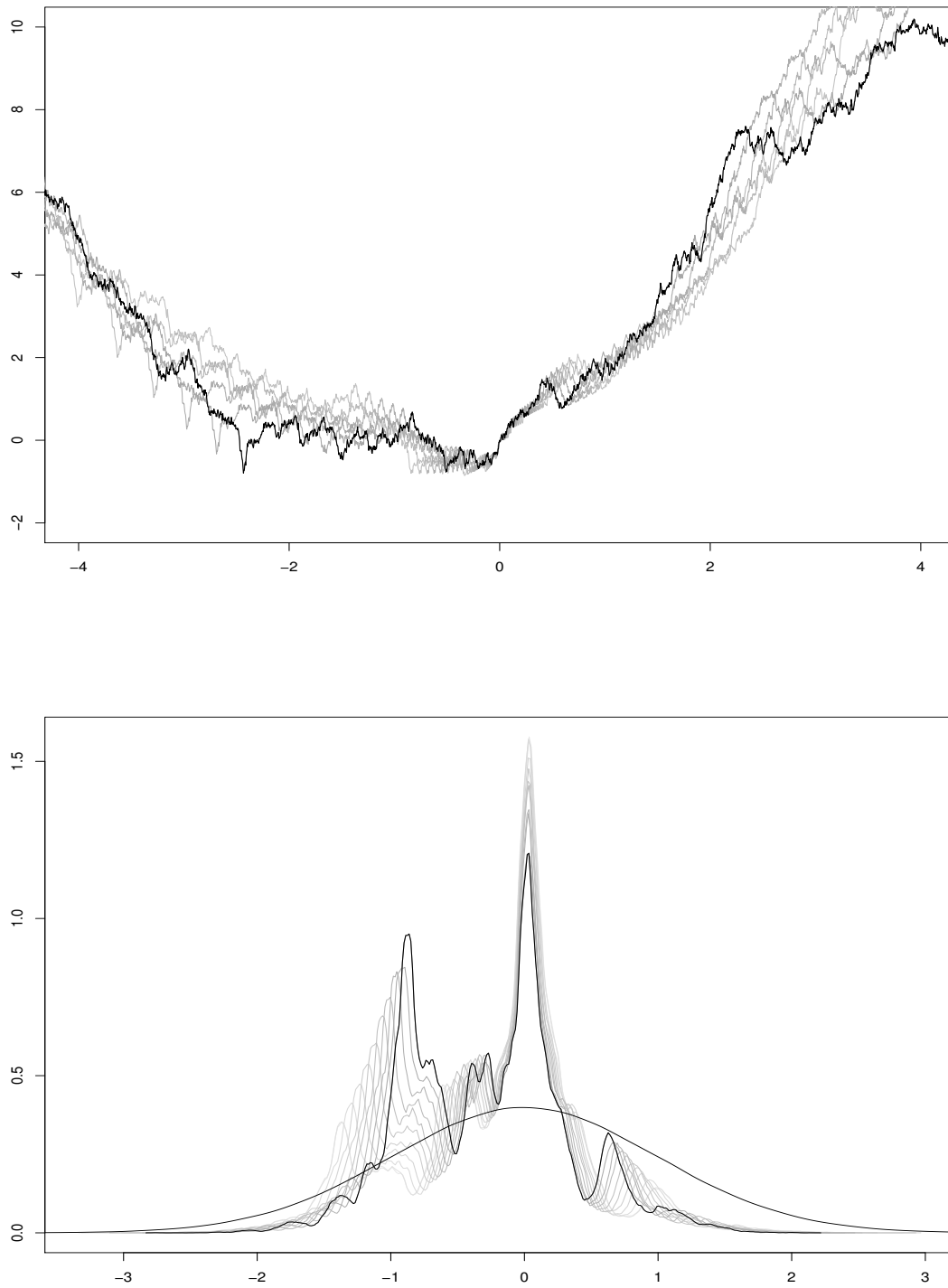
**2. Cas critique.** Nous illustrons ensuite, lorsque  $r = 0$ , la convergence en loi, l'environnement  $\theta$  étant fixé, vers une mesure aléatoire  $\mu$ , dépendant fortement du milieu  $\theta$  et du temps.

Nous représentons, respectivement dans les figures 1.11 et 1.13, le potentiel  $V_\theta(t, \star)$  entre les temps  $T_1 = 6$  et  $T_2 = 7$  ainsi que l'évolution correspondante des densités de transition de la diffusion avec respectivement  $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Z_0 = 0$  (en gras au temps  $T_2$ ) que nous comparons à la densité de la loi normale centrée réduite. Les densités de transitions au temps  $T_1$  et  $T_2$  sont également représentés, pour plus de clarté, respectivement dans les figures 1.12 et 1.14.

Nous remarquons que les mesures de probabilité  $\mu_{T_i\theta}$  sont concentrées au voisinage de l'origine et très irrégulières. De nombreux pics de concentration apparaissent à l'extérieur et se déplacent au cours du temps vers l'origine.

L'interprétation est que la diffusion est localisée dans certaines vallées du potentiel qui, par l'action des transformations d'échelle  $T_i$ , se déplacent aussi vers l'origine. La diffusion est alors emportée avec ces puits.

*De manière imagée, on peut imaginer un nageur ivre, navigant au hasard et de façon rectiligne dans une mer agitée par des vagues et dans un courant constant le ramenant vers l'origine.*

FIGURE 1.11 – Évolution de la mesure invariante  $\mu_{T,\theta}(1)$

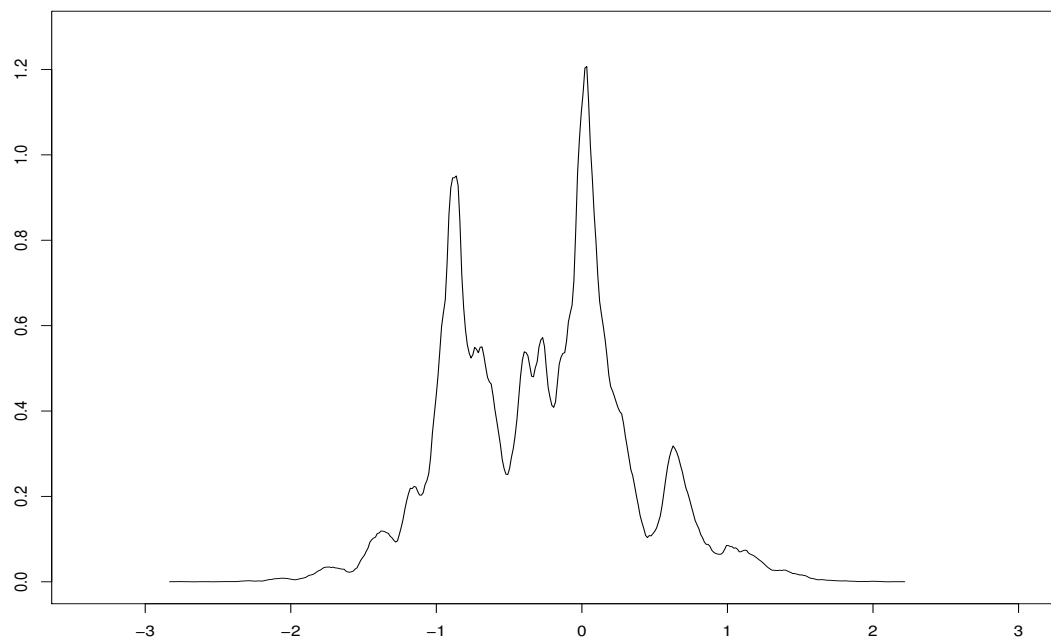
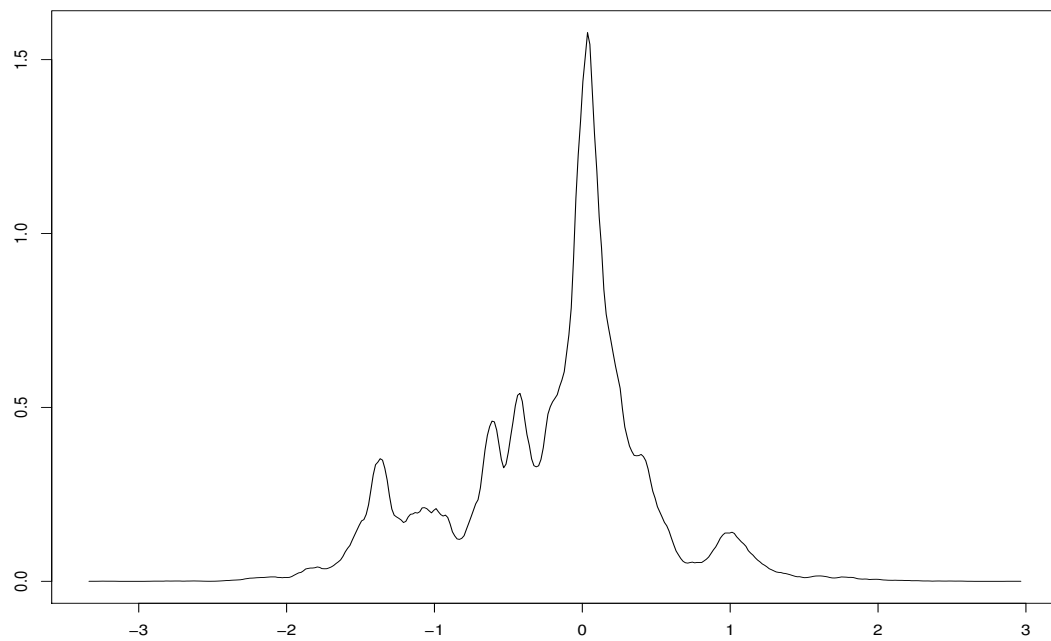
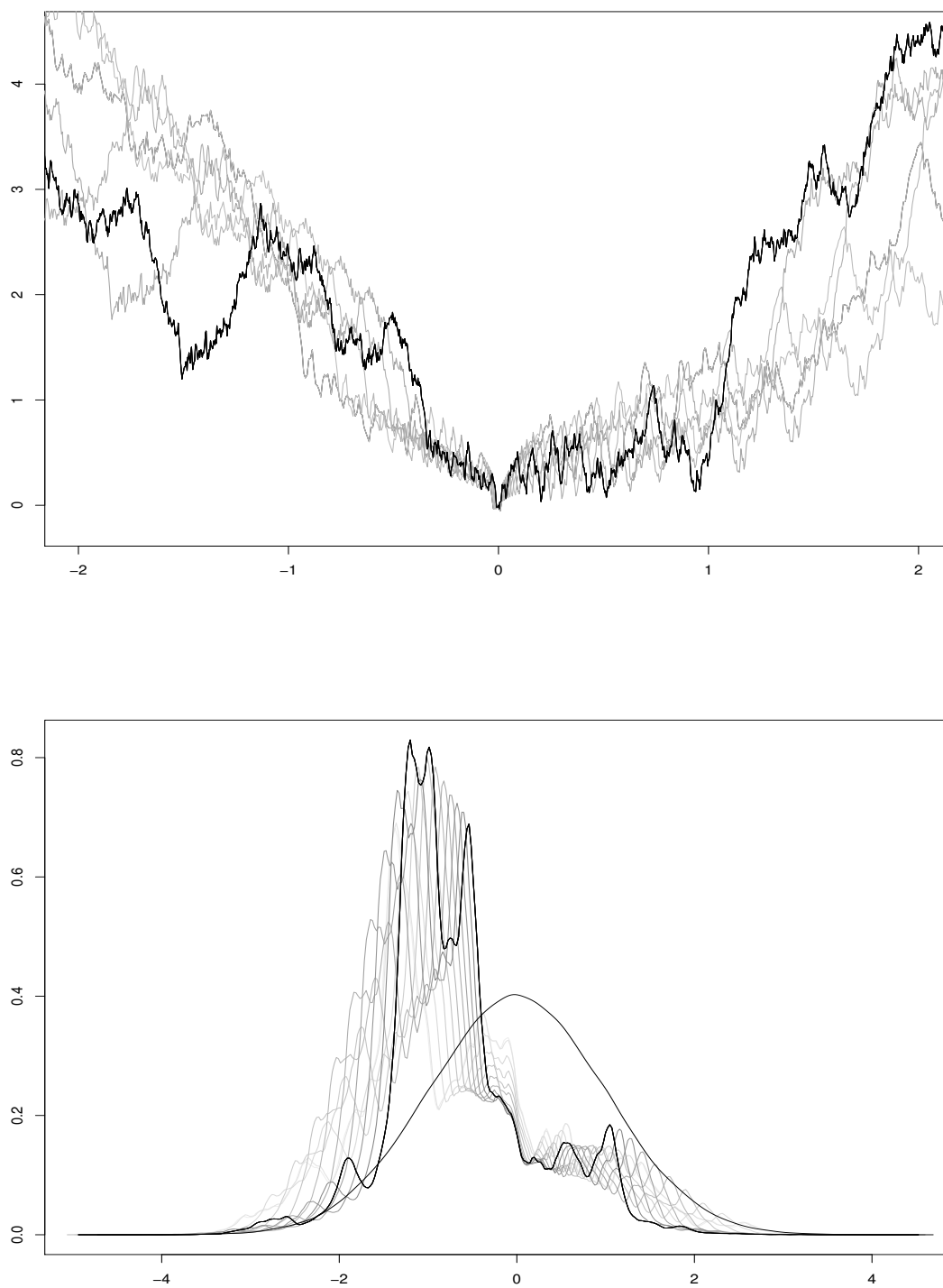


FIGURE 1.12 – Mesures invariantes (1)

FIGURE 1.13 – Évolution de la mesure invariante  $\mu_{T,\theta}(2)$

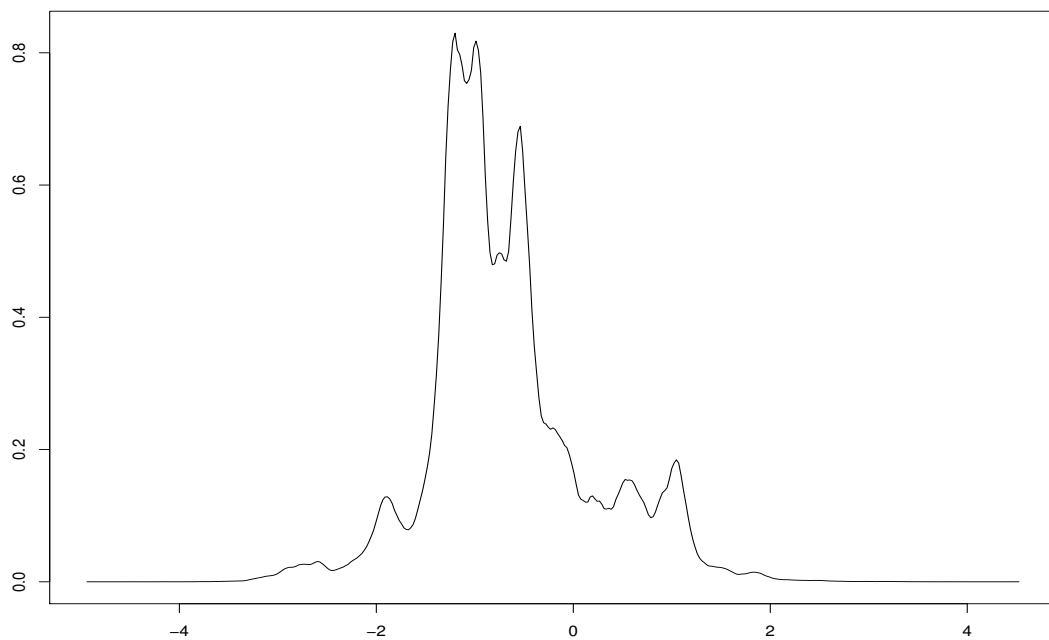
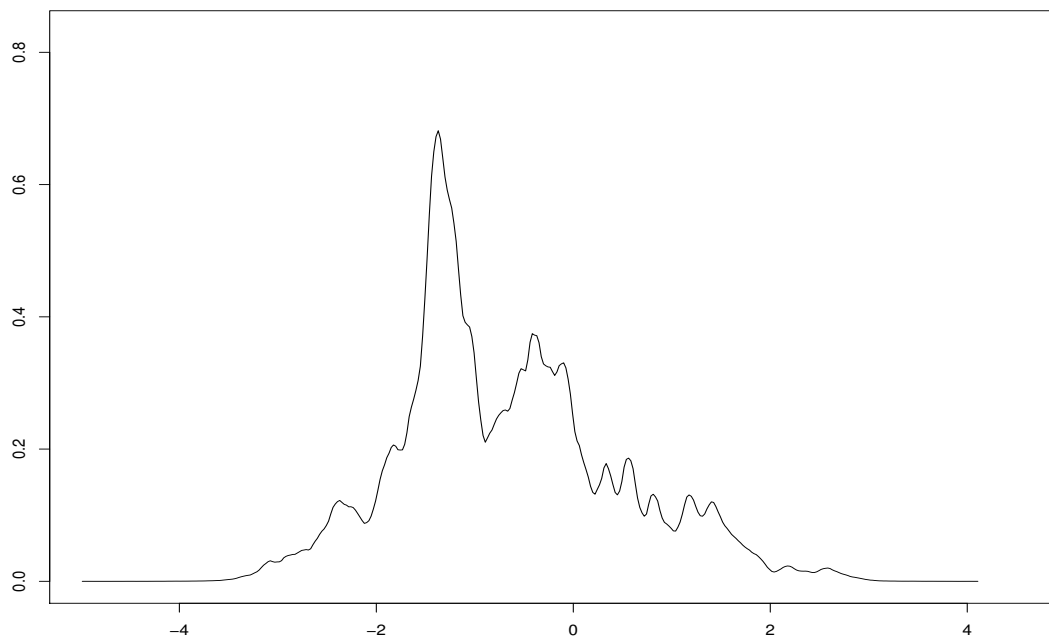


FIGURE 1.14 – Mesures invariantes (2)

#### 1.4.4 Observation d'un déphasage avec le cas homogène dans le cas critique

Considérons l'équation (1.4.12) dans laquelle le temps est gelé dans le potentiel et dans le cas critique  $r = 0$ . Par invariance d'échelle du mouvement brownien  $\theta$ , cette équation homogène peut s'écrire

$$d\zeta_t = dB_t - \frac{1}{2}(\zeta_t + \theta'(\zeta_t))dt, \quad \zeta_0 = z \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (1.4.35)$$

En utilisant la construction de Ito-McKean des diffusions homogènes unidimensionnelles et le théorème ergodique il est facile de montrer que pour presque tout environnement brownien  $\theta$  le processus de diffusion  $\{\zeta_t : t \geq 0\}$  est ergodique et de distribution invariante aléatoire  $\nu_\theta$  de densité donnée sur  $\mathbb{R}$  par

$$g_\theta(x) := \frac{e^{-\left[\frac{x^2}{2} + \theta(x)\right]}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\left[\frac{z^2}{2} + \theta(z)\right]} dz}. \quad (1.4.36)$$

Notons par  $f_\theta$  la densité de probabilité de la distribution quasi-invariante  $\mu_\theta$  de la diffusion (1.4.12) données dans le théorème 1.4.3. Il est facile de remarquer qu'il existe une fonction mesurable  $\mathcal{T}\theta(x)$ , telle que  $\mathcal{T}\theta(0) = 0$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_\theta(x) = \frac{e^{-\left[\frac{x^2}{2} + \mathcal{T}\theta(x)\right]}}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\left[\frac{z^2}{2} + \mathcal{T}\theta(z)\right]} dz} \quad (1.4.37)$$

Remarquons de plus que, pour presque toute trajectoire brownienne  $\theta$  et pour tout  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ ,

$$T_t\theta(x) = \log(g_{T_t\theta}(0)) - \log(g_{T_t\theta}(x)) - \frac{x^2}{2} \quad (1.4.38)$$

et

$$\mathcal{T}(T_t\theta)(x) = \log(f_{T_t\theta}(0)) - \log(f_{T_t\theta}(x)) - \frac{x^2}{2}. \quad (1.4.39)$$

Dans les figures 1.15 et 1.16 suivantes nous représentons, l'environnement brownien  $\theta$  étant fixé, une trajectoire (en pointillés) du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (voir l'équation (1.4.17)) défini par  $\{T_t\theta(x) : t \geq 0\}$  et la trajectoire (en gras) correspondante du processus indéterminé  $\{\mathcal{T}(T_t\theta)(x) : t \geq 0\}$ , jusqu'au temps  $T = 10$  et pour  $x = 0.5; 1; 1.5; 2$ .

Nous simulons par un schéma d'Euler le milieu  $\theta$  ainsi que la diffusion associée (1.4.12) dans le cas critique avec  $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Nous observons un phénomène de déphasage temporel entre la distribution quasi-invariante  $\mu_{T_t\theta}$  de la diffusion (1.4.12) et la distribution invariante  $\nu_{T_t\theta}$  de la diffusion homogène (1.4.35) ayant pour milieu (figé dans le temps)  $T_t\theta$ , la première étant en retard par rapport à la seconde.



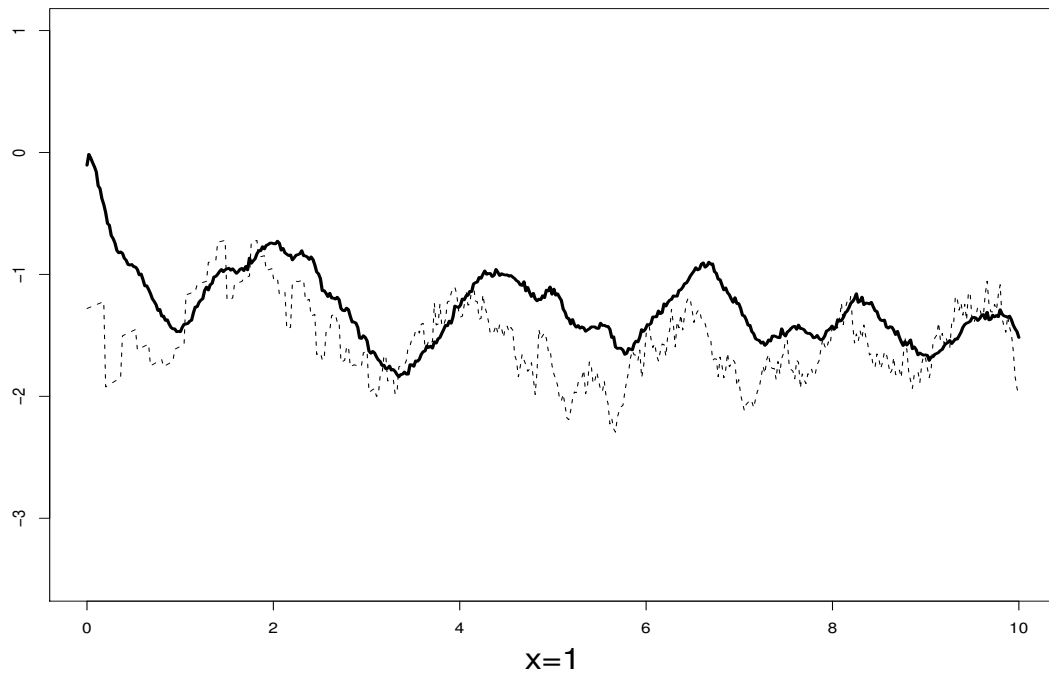
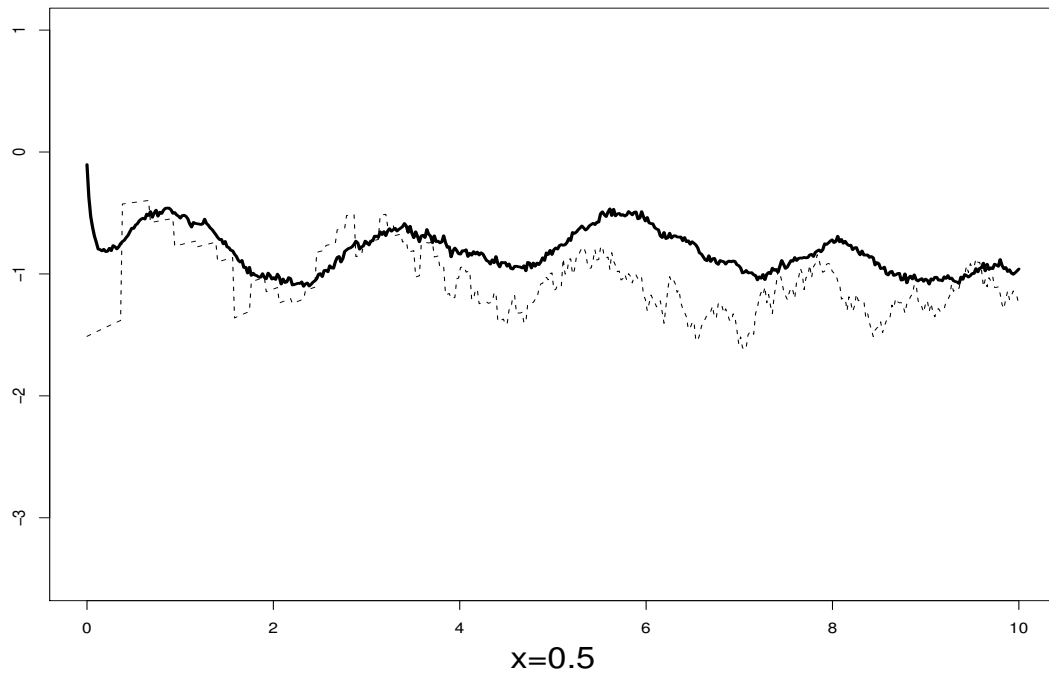


FIGURE 1.15 – Phénomène de déphasage (1)

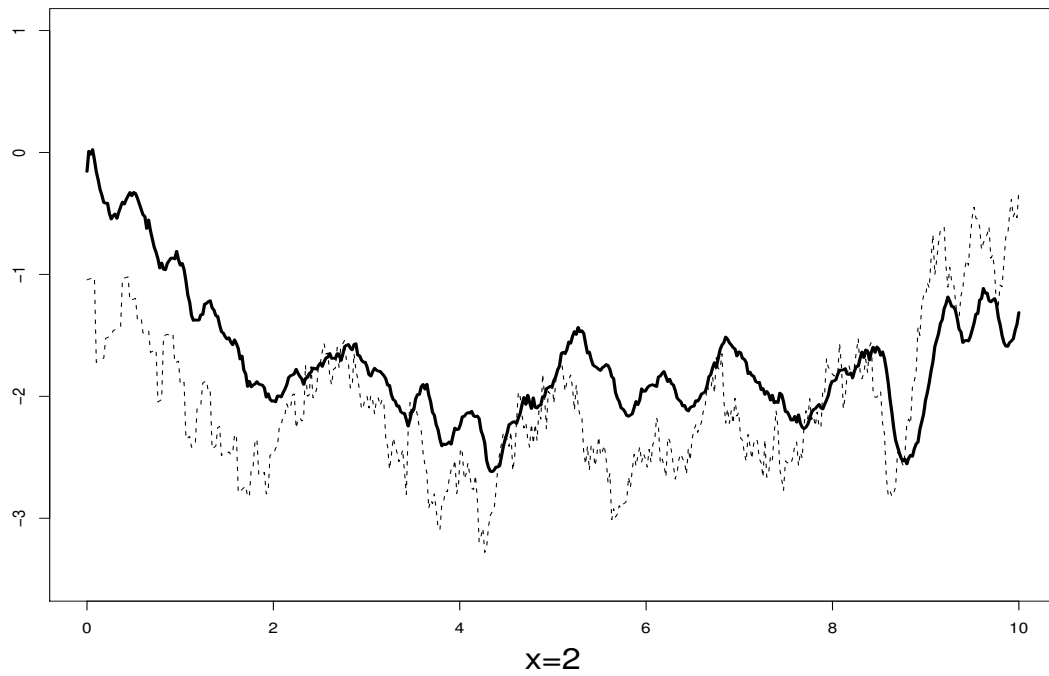
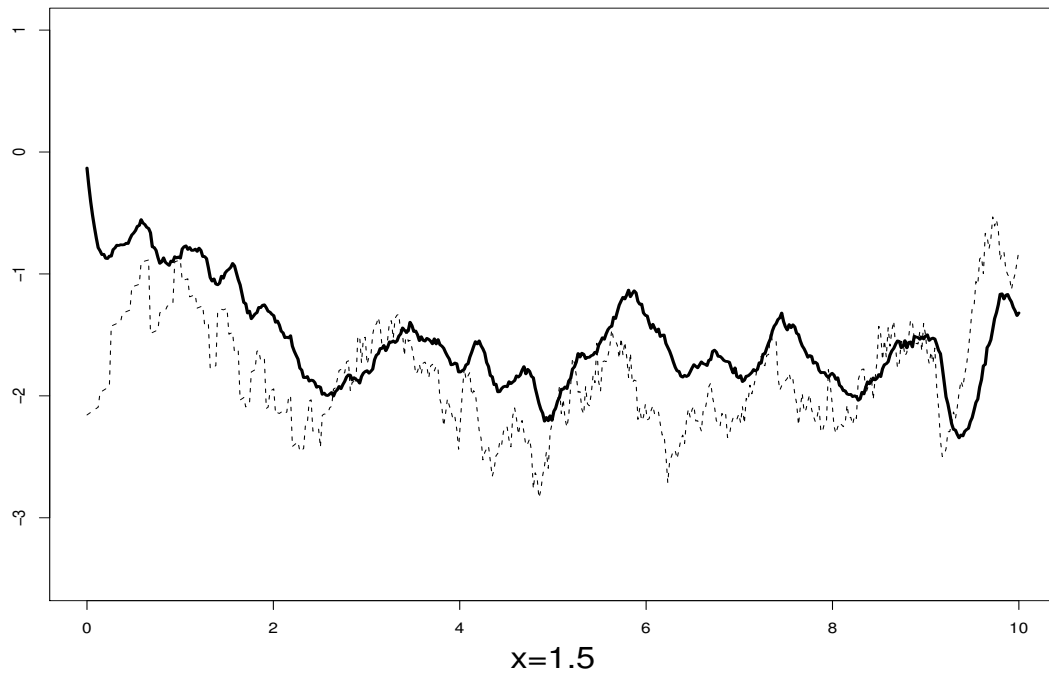


FIGURE 1.16 – Phénomène de déphasage (2)

### 1.4.5 Retour au modèle de Brox inhomogène

En utilisant le changement de temps exponentiel et la transformation d'échelle associée, nous en déduisons les résultats suivants pour la diffusion (1.4.1), analogues aux théorèmes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3. Notons que nous obtenons des résultats similaires aux convergences en loi dans (1.4.8).

Une conséquence immédiate du théorème 1.4.1 est l'existence d'un unique processus de Feller solution de (1.4.1).

**Corollaire 1.4.4.** *Pour tout  $\beta, x \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ , il existe une unique processus de Feller  $X$ , solution de (1.4.1).*

Tout d'abord, lorsque  $\beta > 1/4$ , le milieu aléatoire disparaît asymptotiquement et la diffusion se comporte comme un mouvement brownien standard. Nous obtenons un théorème central limite (TCL) sous la loi trempée, analogue à la première convergence en loi dans (1.4.8).

**Corollaire 1.4.5.** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1). \quad (1.4.40)$$

Ensuite, pour  $\beta = 0$ , nous en déduisons un TCL différent sous les lois trempées et recuites, faisant intervenir la mesure aléatoire  $\mu$ . Nous obtenons un résultat analogue à la seconde convergence en loi dans (1.4.8) ainsi qu'un résultat similaire à ceux obtenus par Brox dans (1.3.10) et (1.3.11). En effet, notons  $\{R_{s,t}(\theta) : t \geq s > 0\}$  le semi-groupe de Markov inhomogène associé au processus de Markov normalisé

$$\left\{ \frac{X_t}{\sqrt{t}} : t > 0 \right\}. \quad (1.4.41)$$

Notons en outre (l'espérance étant prise sous la mesure de Wiener)

$$\widehat{R}_{s,t} := \mathbb{E}_{\mathcal{W}}[R_{s,t}(\theta)]. \quad (1.4.42)$$

**Corollaire 1.4.6.** *Pour tout  $0 < \alpha < 1$  et  $s > 0$ , il existe  $\lambda > 0$  tel que, pour tout  $\nu \in \mathcal{M}_{1,U_\alpha}$ ,  $\widehat{\nu} \in \mathcal{M}_{1,V_\alpha}$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu R_{s,t}(\theta) - \mu_{S_{\sqrt{t}}\theta}\|_{U_\alpha})}{\log t} \leq -\lambda \quad (1.4.43)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\widehat{\nu} \widehat{R}_{s,t} - \widehat{\mu}\|_{V_\alpha} = 0. \quad (1.4.44)$$

Il est utile de souligner que nous prouvons des convergences plus fortes qu'en distribution, contrairement à (1.4.8), et que nous obtenons les vitesses de convergence sous les lois trempées (polynomiales ici), contrairement à (1.3.10).

### 1.4.6 Illustrations numériques des différents TCLs

Nous illustrons ici les TCLs décrits dans les corollaires 1.4.5 et 1.4.6 par quelques simulations numériques. On utilise une nouvelle fois la méthode de Monte-Carlo et un schéma d'Euler, mais cette fois pour l'équation (1.4.1).

**1. Cas sur-critique.** Nous commençons par le cas où  $\beta > 1/4$  et nous mettons en évidence, l'environnement étant fixé, le comportement diffusif de la diffusion (1.4.1) et le TCL standard.

Nous représentons dans la figure (1.17) la densité au temps  $T = 3000$  du processus normalisé (1.4.41) avec  $X_1 = 0$  et  $\beta = 1.25$  que nous comparons à la densité de la loi normale centrée réduite, en pointillés.

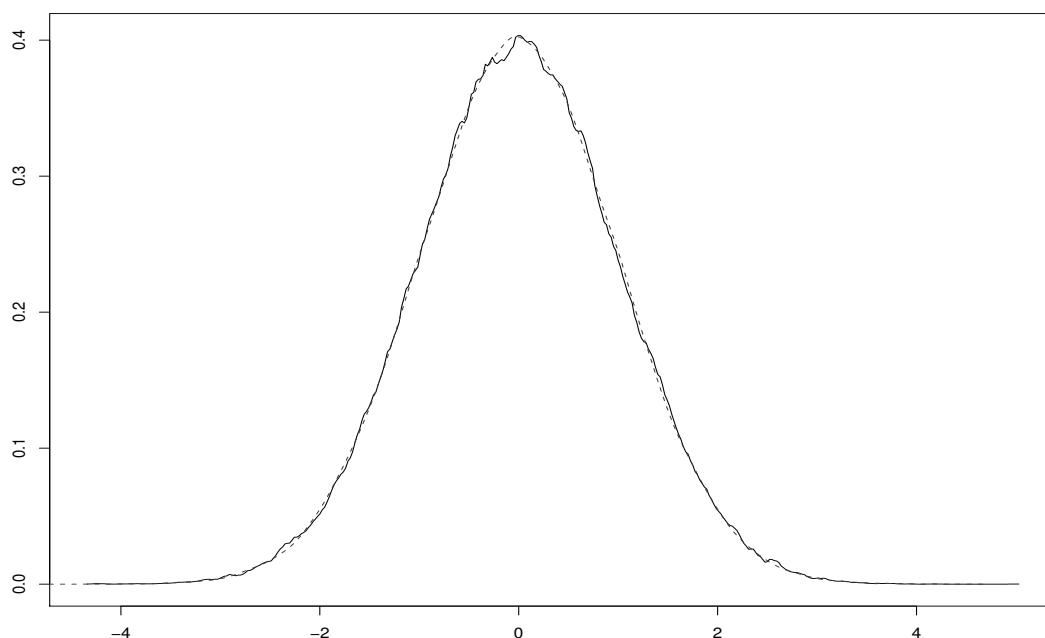
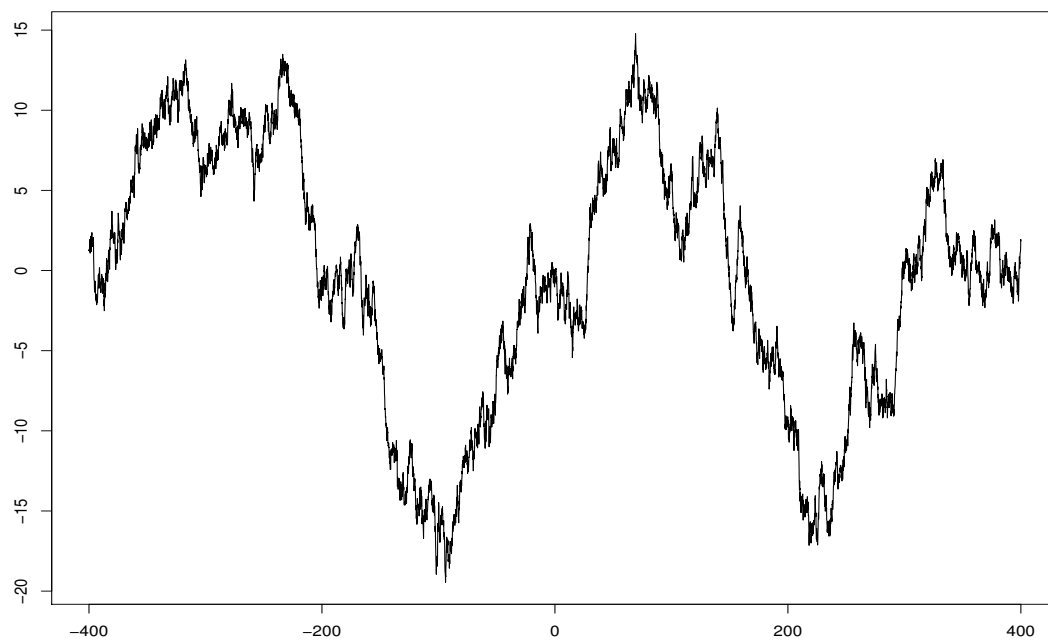


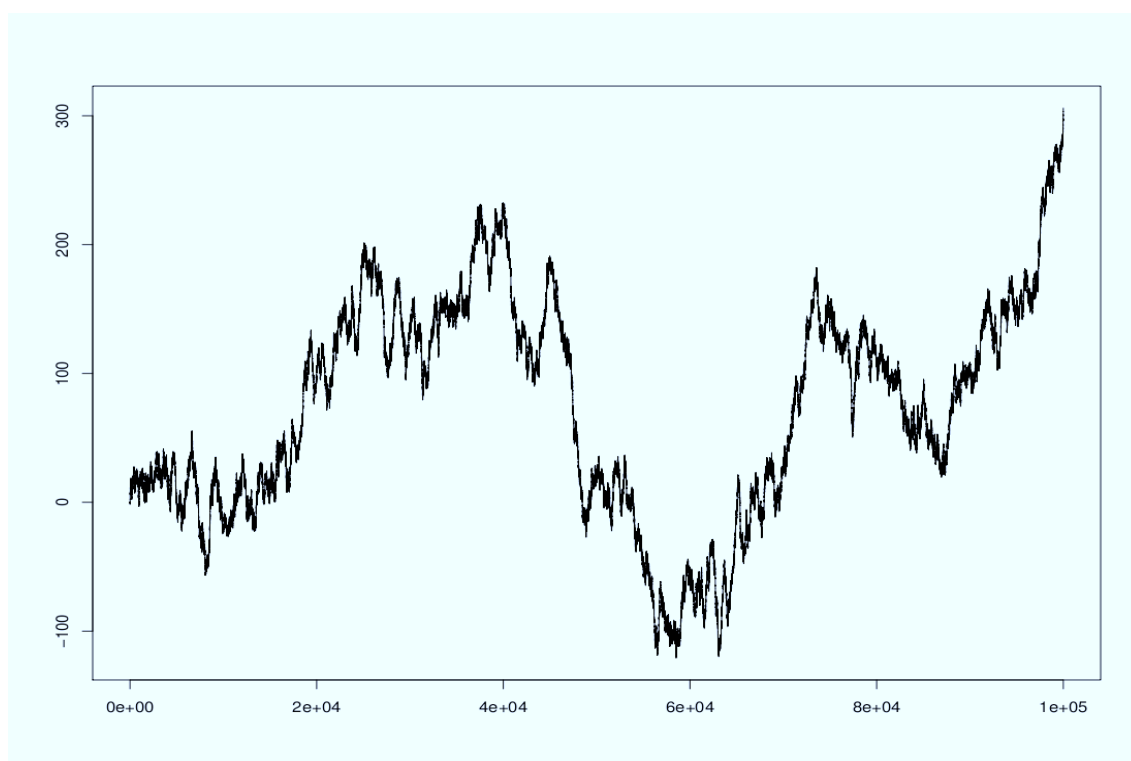
FIGURE 1.17 – TCL : cas sur-critique

**2. Cas critique.** Nous illustrons ici, lorsque  $\beta = 1/4$ , le comportement diffusif de la diffusion (1.4.1) et la convergence en loi, l'environnement étant fixé, vers une mesure aléatoire dépendant fortement de l'environnement et du temps, bien que nous ne remarquons pas visuellement de phénomène de localisation comme dans le cas homogène de Brox.

Nous représentons dans la figure (1.18) une trajectoire typique de la diffusion de Brox inhomogène dans le cas critique ainsi que l'environnement correspondant puis, nous représentons dans la figure (1.19), la densité au temps  $T = 3000$  du processus normalisé (1.4.41) avec  $X_1 = 0$  que nous comparons à celle de la loi normale centrée réduite.



(a) Environnement



(b) Trajectoire

FIGURE 1.18 – Diffusion de Brox inhomogène : cas critique

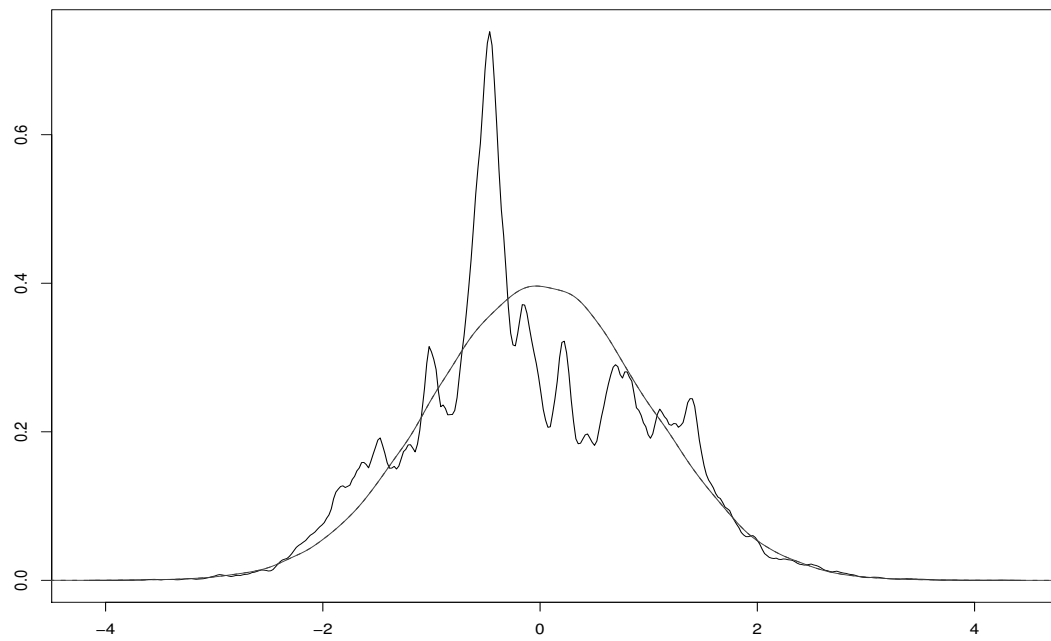


FIGURE 1.19 – TCL : cas critique

### 1.4.7 Schéma des preuves

Encore une fois le caractère inhomogène des diffusions considérées ne facilite pas la démarche. En effet, il n'existe plus de fonction d'échelle associée à un tel processus et nous ne pouvons plus reproduire la construction de Brox.

**1. Pseudo-fonction d'échelle.** Nous pouvons considérer en revanche la pseudo-fonction d'échelle (on gèle le temps) du processus de diffusion (1.4.12) définie sur  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  par

$$S_\theta(t, x) := \int_0^x e^{V_\theta(t, y)} dy. \quad (1.4.45)$$

Nous montrons que  $\{Z_t : t \geq 0\}$  est une solution de (1.4.12) si, et seulement si,

$$\{\mathfrak{Z}_t := S_\theta(t, Z_t) : t \geq 0\} \quad (1.4.46)$$

satisfait l'équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement brownien standard  $B$ ,

$$d\mathfrak{Z}_t = \sigma_\theta(t, \mathfrak{Z}_t) dB_t + d_\theta(t, \mathfrak{Z}_t) dt, \quad (1.4.47)$$

avec, pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sigma_\theta(t, x) := \partial_x S_\theta(t, H_\theta(t, x)), \quad d_\theta(t, x) := \partial_t S_\theta(t, H_\theta(t, x)) \quad (1.4.48)$$

et

$$S_\theta(H_\theta(t, x)) = x. \quad (1.4.49)$$

cependant, tout ne se passe pas aussi bien que dans le cas de Brox. En effet  $\mathfrak{Z}$  n'est pas une martingale et on n'a plus de critères simples pour montrer que la diffusion ainsi construite n'explose pas en temps fini.

L'idée est de trouver de bonnes fonctions de Lyapunov, mais cela est plus difficile qu'à l'accoutumé, le domaine du générateur infinitésimal du processus de diffusion (1.4.12) dépendant du milieu.

**2. Diffusions asymptotiquement homogène et ergodique.** Lorsque  $r = 0$  nous utilisons des résultats similaires à ceux employés dans la première partie et dans [3], en particulier le Lemme 1.2.17. Nous remarquons à cet effet que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma_\theta(t, x) = S' \circ S^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d_\theta(t, x) = 0, \quad (1.4.50)$$

uniformément sur les compacts, avec  $S$  la fonction d'échelle d'un processus de Ornstein-Uhlenbeck définie par

$$S(x) := \int_0^x e^{\frac{y^2}{2}} dy. \quad (1.4.51)$$

Ainsi  $\mathfrak{Z}$  est asymptotiquement homogène et  $S_*\Gamma$ -ergodique, avec  $\Gamma = \mathcal{N}(0, 1)$  et  $S_*\Gamma$  la mesure image de  $\Gamma$  par  $S$ . Il suffit alors (point le plus délicat) de montrer que le processus  $\mathfrak{Z}$  est borné en probabilité. Ce dernier point s'obtient en construisant encore de bonnes fonctions de Lyapunov et plus précisément, en donnant des conditions de dérive de Foster-Lyapunov.

**3. Système dynamique aléatoire sous-jacent.** Dans le cas où  $r = 0$ , la méthode est sensiblement différente car la diffusion (1.4.12) n'est plus asymptotiquement homogène.

Cependant, nous récupérons une structure très forte de système dynamique aléatoire sur le semi-groupe inhomogène  $\{P_{s,t}(\theta) : t \geq s \geq 0\}$  associé à (1.4.12). Celui-ci agit naturellement linéairement à gauche sur l'espace des mesures signées  $\mathcal{M}$  sur  $\mathbb{R}$  et le système dynamique sous-jacent (ergodique dans notre cas) agit sur l'espace de Wiener et est donné par

$$\{T_t : t \in \mathbb{R}\}. \quad (1.4.52)$$

Nous montrons la relation fondamentale, dite de cocycle, suivante (voir [53] pour une présentation plus générale des systèmes dynamiques aléatoires et des propriétés qui en découlent) : pour tout  $t, s \geq 0$  et presque tout environnement brownien  $\theta$ ,

$$P_{s+t}(\theta) = P_t(\theta)P_s(T_t\theta), \quad (1.4.53)$$

Les systèmes dynamiques aléatoires linéaires ont largement été étudiés. Leur dynamique (en particulier les exposants de Lyapunov) dans le cas où les systèmes dynamiques aléatoires agissent sur un espace de dimension finie (les produits infinis de matrices aléatoires par exemple) sont bien compris depuis longtemps (voir [54, 55] par exemple), tandis que la situation où ceux-ci agissent sur un espace de Banach séparable ont (voir [56]) récemment été étudiés.

Nous obtenons dans le théorème 1.4.3 une mesure de probabilité aléatoire quasi-invariante pour les opérateurs markoviens aléatoires  $P_{0,t}(\theta)$  et nous donnons des convergences dans les espaces de Banach  $\mathcal{M}_{U_\alpha}$  et  $\mathcal{M}_{V_\alpha}$ .

Nous avons besoin d'un théorème de Perron-Frobenius aléatoire. Ce type de théorème a été obtenus dans [57] par exemple, pour des produits infinis de matrices aléatoires positives, et plus récemment dans [58], pour des produit infinis d'opérateurs markoviens stationnaires sur un espace compact.

Cependant, les opérateurs de Markov que nous considérons agissent sur l'espace vectoriel de dimension infinie des mesures réelles signée et sont définis sur  $\mathbb{R}$ . Pour lever cette difficulté, nous avons encore besoin de construire de bonnes fonctions de Lyapunov afin d'utiliser une méthode de couplage présenté dans [59] nous donnant la convergence du système dynamique aléatoire. La clef est l'ergodicité du système dynamique (1.4.52).



## 1.5 Perspectives de recherche

Présentons quelques généralisations possibles pouvant ouvrir la voie à des travaux de recherche ultérieurs. Nous distinguons encore une fois deux grands axes, les environnements déterministes ou aléatoires.

### 1.5.1 En milieu déterministe

Le premier axe de recherche présenté ci-dessous consiste essentiellement à généraliser les résultats obtenus pour la diffusion (1.2.1) à des termes de diffusion et de dérive plus généraux.

**1. Bruit multiplicatif.** Une première idée est changer le terme de diffusion additif  $dB_t$  par le terme de diffusion multiplicatif  $\sigma(t, X_t)dB_t$  avec  $\sigma$  vérifiant une des deux conditions suivantes :

1.  $\sigma$  bornée et uniformément elliptique : il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$M^{-1} \leq \sigma(t, x) \leq M. \quad (1.5.54)$$

2.  $\sigma$  indépendant du temps et auto-similaire : il existe  $0 < \delta < 1$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sigma(x) = |x|^\delta. \quad (1.5.55)$$

Nous nous attendons dans le premier cas à obtenir des résultats similaires à l'équation (1.2.1), c'est-à-dire une frontière d'équation  $\beta = (\alpha + 1)/2$  et des comportements diffusifs en  $\sqrt{t}$  au dessus de cette droite.

Dans le second cas, en raison du principe heuristique 1.1, on conjecture une frontière différente et des comportements super-diffusifs en  $\psi(t)$  au dessus de la droite d'équation

$$\beta = \frac{\alpha + 1 - 2\delta}{2(\delta - 1)}, \quad \text{avec } \psi(t) := t^{\frac{1}{2(1-\delta)}}. \quad (1.5.56)$$

**2. Généralisation du terme de dérive.** Nous pouvons aussi généraliser le terme de dérive et considérer, par exemple, un terme  $d$  vérifiant

$$d(t, x) \underset{t, |x| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2}g(t)V'(x), \quad (1.5.57)$$

avec  $g$  une fonction monotone tendant vers 0 ou  $\pm\infty$  et  $V$  un potentiel satisfaisant

$$V(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \rho_+ |x|^{a_+}, \quad V(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \rho_- |x|^{a_-} \quad (1.5.58)$$

et

$$V(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \rho_{0^+} |x|^{a_{0^+}}, \quad V(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\sim} \rho_{0^-} |x|^{a_{0^-}}. \quad (1.5.59)$$

**3. Bruit stable.** Une autre idée est de généraliser la diffusion (1.2.1) tout en gardant les propriétés d'auto-similarité du terme de diffusion  $B$ . Il existe deux généralisations naturelles qu'il serait intéressant d'étudier :

1. Les processus de Lévy stables.
2. Les mouvements browniens fractionnaires.

Notons que le cas du mouvement brownien fractionnaire semble plus difficile à traiter car dans ce cas on perd le caractère markovien des solutions. De plus, le terme de diffusion n'est même plus une martingale. Évoquons seulement le premier cas.

Considérons  $\{L_t : t \geq 0\}$  un processus de Lévy stable de paramètre  $s \in (0, 2]$  : pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\{L_{\lambda t} : t \geq 0\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\lambda^{1/s} L_t : t \geq 0\}. \quad (1.5.60)$$

L'idée est de considérer l'équation différentielle stochastique,

$$dX_t = dL_t - \frac{1}{2} \partial_x V_{\rho, \alpha, \beta}(t, X_t) dt. \quad (1.5.61)$$

Les équations différentielles stochastiques dirigées par un processus de Lévy ont été étudiés notamment dans [60–62] (existence, unicité) et dans [63–65] (ergodicité).

Par ailleurs, lorsque  $\beta < 0$ , l'équation (1.5.61) est équivalente, en utilisant un changement de temps, à une équation de recuit simulé analogue à (1.2.48) et à celle étudiée dans [66]. Heuristiquement (voir 1.1) la droite d'équation

$$\beta = \frac{\alpha - 1 + s}{s} \quad (1.5.62)$$

a encore toutes les chances de jouer le rôle de droite critique pour le comportement en loi de la diffusion. La question est de savoir si on peut généraliser les résultats de convergence obtenus précédemment. Notamment, a-t-on

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t^{1/s}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \begin{cases} L_1, & \text{au dessus de la droite critique ?} \\ \mu \neq \mathcal{L}(L_1), & \text{sur la droite critique ?} \end{cases} \quad (1.5.63)$$

Ceci fait l'objet d'un travail en préparation avec Mihai Gradinaru et Ilya Pavlyukevich.

**4. Processus à mémoire.** Un autre axe de recherche consiste à tenter de généraliser les résultats précédemment cités à des processus à mémoire renforcée ou avec délai.

**Avec renforcement.** Nous pouvons considérer un processus renforcé satisfaisant

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \left( \int_0^t \partial_x V(t, X_t - X_s) ds \right) dt,$$

avec  $B$  un mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  et  $V$  un potentiel déterministe satisfaisant des conditions d'invariance d'échelle.

Les marches aléatoires renforcées en temps discret ont été étudiés par exemple dans [67, 68] et leurs généralisations en temps continu dans [69–73].

De plus, des modèles avec un potentiel dépendant du temps ont déjà été considérés dans [74–77] (méthodes de recuit simulé).

L'idée serait de généraliser ces résultats et de voir si on peut mettre en exergue une droite critique pour le comportement asymptotique de ces processus.

**Avec délai.** Des questions similaires peuvent être posées pour un processus solution de l'équation différentielle stochastique avec délai de la forme

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \left( \int_{t-\tau}^t \partial_x V(t, X_s) ds \right) dt,$$

avec  $\tau > 0$ ,  $B$  un mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  et  $V$  un potentiel déterministe satisfaisant des conditions d'invariance d'échelle (voir [78] pour une introduction à ce type de processus).

**5. En dimension supérieure.** Nous pouvons également nous intéresser à une équation similaire à (1.2.1) en dimension  $d \geq 2$ . Par exemple,

$$dX_t = dB_t + \rho \frac{\|X_t\|^\alpha}{t^\beta} dt,$$

avec  $B$  un mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne. Il n'existe plus alors de fonction d'échelle dans le cas homogène, ce qui rend la tâche bien plus ardue.

### 1.5.2 En milieu aléatoire

Un second axe de recherche consiste à approfondir les résultats obtenus pour la diffusion (1.4.1) ainsi qu'à les généraliser à une classe plus grande d'environnements aléatoires.

#### 1. La diffusion de Brox inhomogène.

**Cas sous-critique.** Il manque l'étude du cas  $\beta < 1/4$  pour l'équation (1.4.1). En effet, les outils mis en place dans le cas  $\beta \geq 1/4$  ne semblent pas fonctionner dans cette situation.

Cependant, nous pouvons formuler les conjectures suivantes, qui généralisent à la fois le résultat de Brox 1.3.1 et la convergence (1.4.9) dans le cas déterministe.

**Conjecture 1.5.1.** *Supposons  $0 < \beta < 1/4$ . Pour presque tout environnement brownien  $\theta$ , on a la convergence en probabilité sous la loi trempée  $\mathbb{P}(\theta)$ ,*

$$\frac{X_t - b_{t^\beta \log(t)} \theta}{t^{2\beta} (\log t)^2} = \frac{X_t}{t^{2\beta} (\log t)^2} - b_1 (S_{t^{2\beta} (\log t)^2} \theta) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_\theta} 0. \quad (1.5.64)$$

*Autrement dit, la diffusion est localisée au temps  $t$  dans la vallée de hauteur  $t^\beta (\log t)^2$ .*

**Conjecture 1.5.2.** *Supposons  $\beta < 0$ . Pour presque tout environnement brownien  $\theta$ , on a la convergence presque sûre,*

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} m_\theta \quad p.s., \quad (1.5.65)$$

*où  $m_\theta$  est une variable aléatoire de support l'ensemble des minima locaux de  $\theta$ . Autrement dit, la diffusion est piégée dans un minimum local du potentiel. Notons que cette situation est naturellement liée à une équation de type recuit simulé en environnement aléatoire.*

Je suis en contact avec Roland Diel qui a étudié d'une façon précise dans [79,80] le temps local de diffusions du type (3.1.2). Cela pourrait permettre de mieux comprendre le comportement de la diffusion (1.4.1) et nous avons commencé à travailler dans cette direction.

**1.2. Loi du type logarithme itéré.** Comme dans l'étude de la diffusion (1.2.1) en milieu déterministe, il pourrait également être intéressant de donner une description trajectorielle plus précise de la diffusion (1.4.1) en cherchant des lois du type logarithme itéré.

**1.3. Étude du temps local.** Comme pour la diffusion de Brox (cas  $\beta = 0$  dans 1.4.1), il reste à donner le comportement du temps local de ces diffusions en toute généralité.

**2. Environnement auto-similaire généraux.** Il existe déjà de nombreuses généralisations de la diffusion de Brox (3.1.2) à des milieux aléatoires auto-similaires.

On pourra à ce titre consulter [27,32,50,51,81] par exemple. Notre idée est de faire un travail analogue dans le cas inhomogène (1.4.1) et d'étudier l'équation

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \frac{\theta'_h(X_t)}{t^\beta} dt. \quad (1.5.66)$$

Avec  $\{\theta_h(x) : x \in \mathbb{R}\}$  un processus auto-similaire d'indice  $h$ , indépendant du brownien  $B$ .

Intuitivement, la droite  $\beta = h/2$  est une droite critique et nous cherchons à généraliser les résultats obtenus précédemment.

**3. En dimension supérieure.** Nous pouvons également nous intéresser à l'équation (1.4.1) en dimension supérieure. Le milieu  $\theta$  est alors un champs aléatoire à définir.

Ceci généralise le cas homogène étudié dans [26, 82] et nécessite d'utiliser des formes de Dirichlet inhomogènes en temps (voir par exemple [83,84]), ce qui complique considérablement la situation.

### 1.5.3 Illustrations numériques des conjectures

Nous illustrons la conjecture 1.5.1 dans les figures 1.20 et 1.21 ainsi que la conjecture 1.5.2 dans les figures 1.22 et 1.23.

Tout d'abord, la figure 1.20 représente une trajectoire, à environnement fixé, de la diffusion (1.4.1) avec  $X_1 = 0$ . Nous remarquons un phénomène de localisation plus faible que dans le cas homogène de Brox (voir la figure 1.8) mais présent, contrairement au cas où  $\beta \geq 1/4$ . Ce phénomène de localisation semble bien être de l'ordre de  $t^{2\beta}(\log t)^2$  et non diffusif comme l'atteste la figure 1.21. Nous avons représenté, au temps  $T = 20000$  avec  $\beta = 0.1$ , les densités respectives des processus normalisés

$$\left\{ \frac{X_t}{t^{2\beta}(\log t)^2} : t \geq 0 \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{X_t}{\sqrt{t}} : t \geq 0 \right\}, \quad (1.5.67)$$

comparées à la densité de la loi normale centrée réduite, en pointillés.

Pour terminer, nous illustrons la conjecture 1.5.2. Pour cela nous simulons des trajectoires de la diffusion (1.4.1) avec  $X_1 = 0$  et environnement fixé, dans la figure 1.22 avec  $\beta = -0.05$ , et dans la figure 1.23 avec  $\beta = -0.3$ . Nous remarquons comme annoncé un phénomène extrême de localisation dans les puits du potentiel, d'autant plus fort que  $\beta$  est négatif.

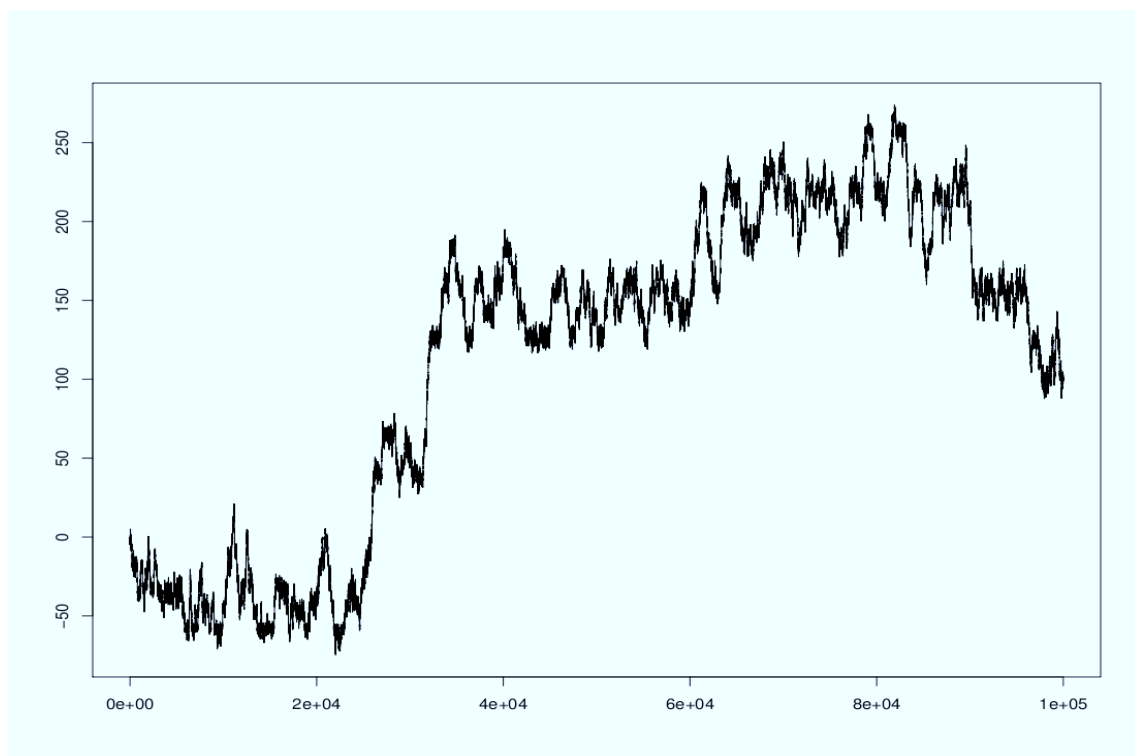
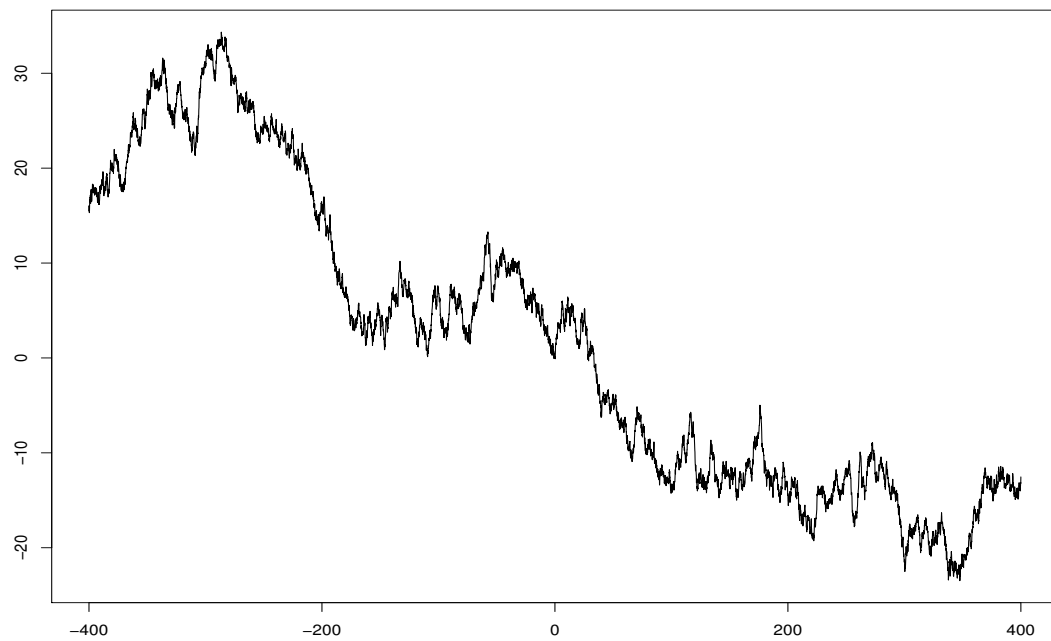


FIGURE 1.20 – Diffusion de Brox inhomogène : cas sous-critique (faible)

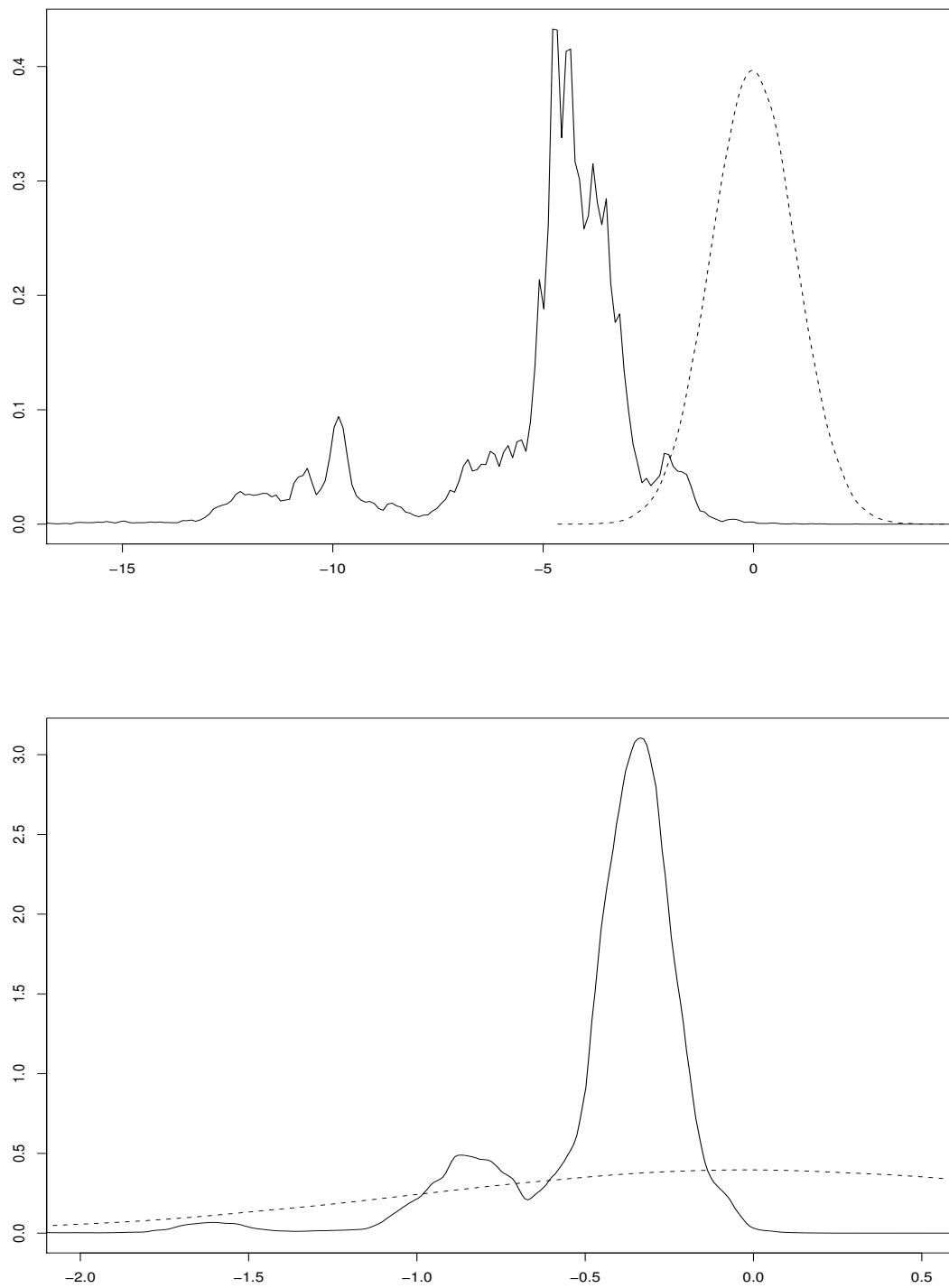


FIGURE 1.21 – Comparaison entre la conjecture 1.5.1 et le TCL classique

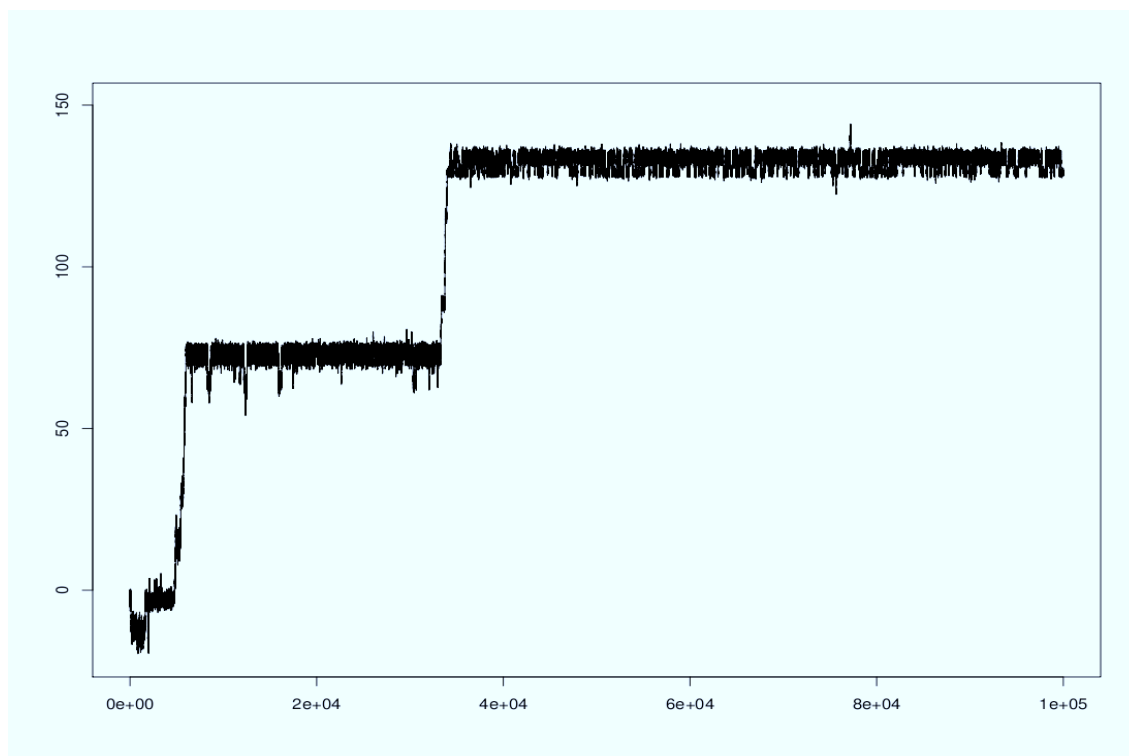
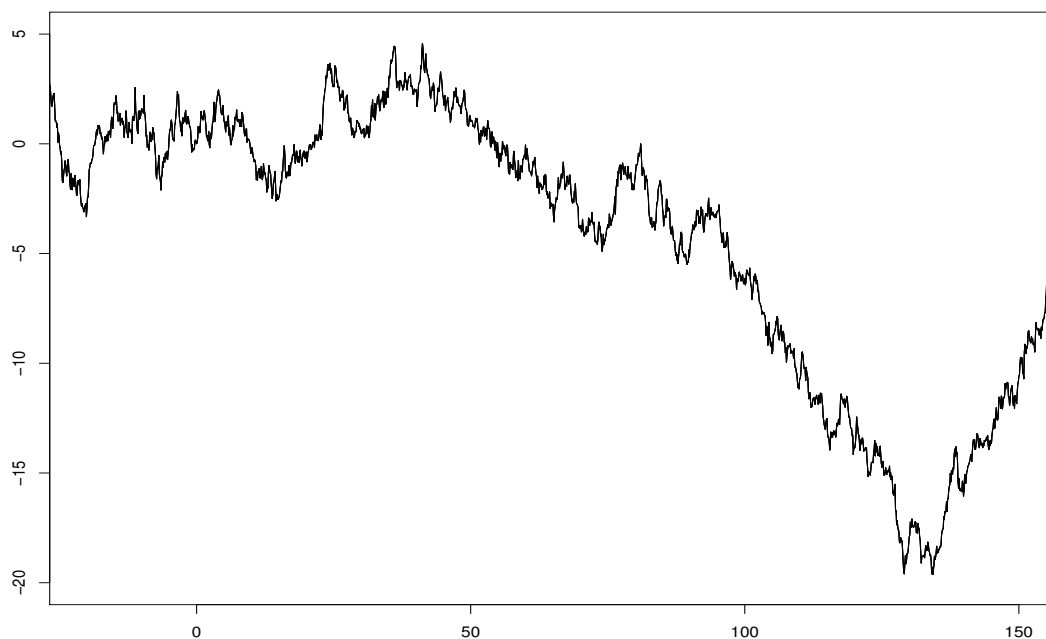


FIGURE 1.22 – Diffusion de Brox inhomogène : cas sous-critique (fort) (1)



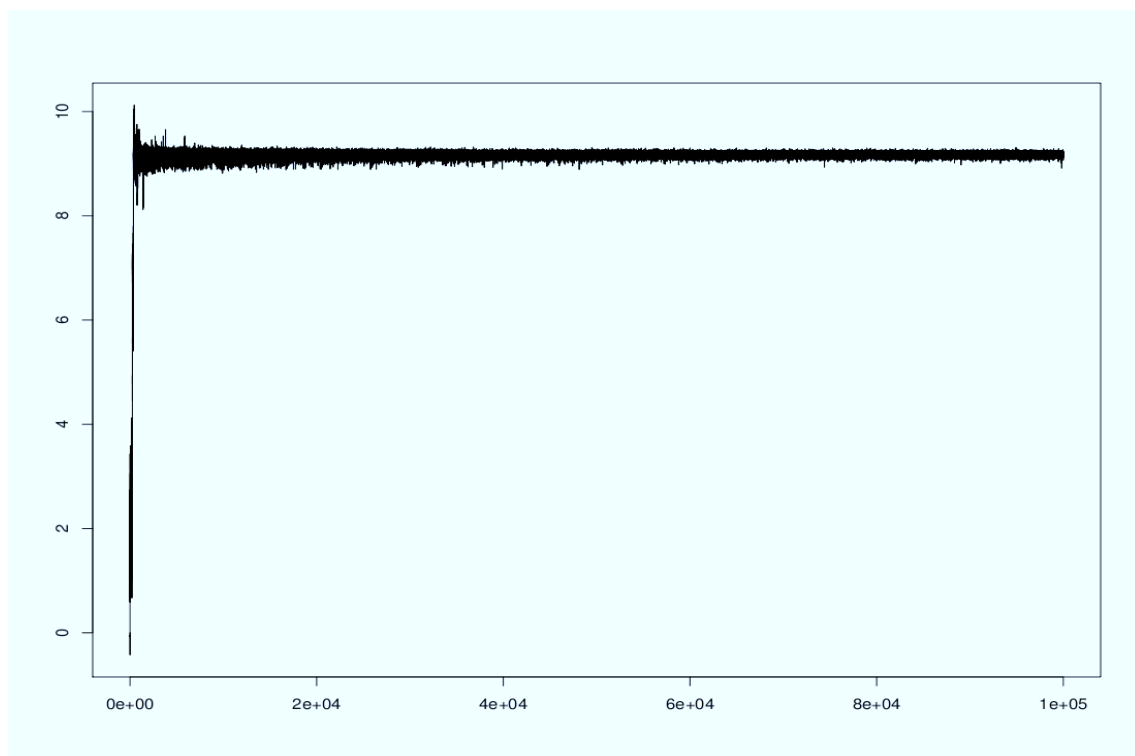
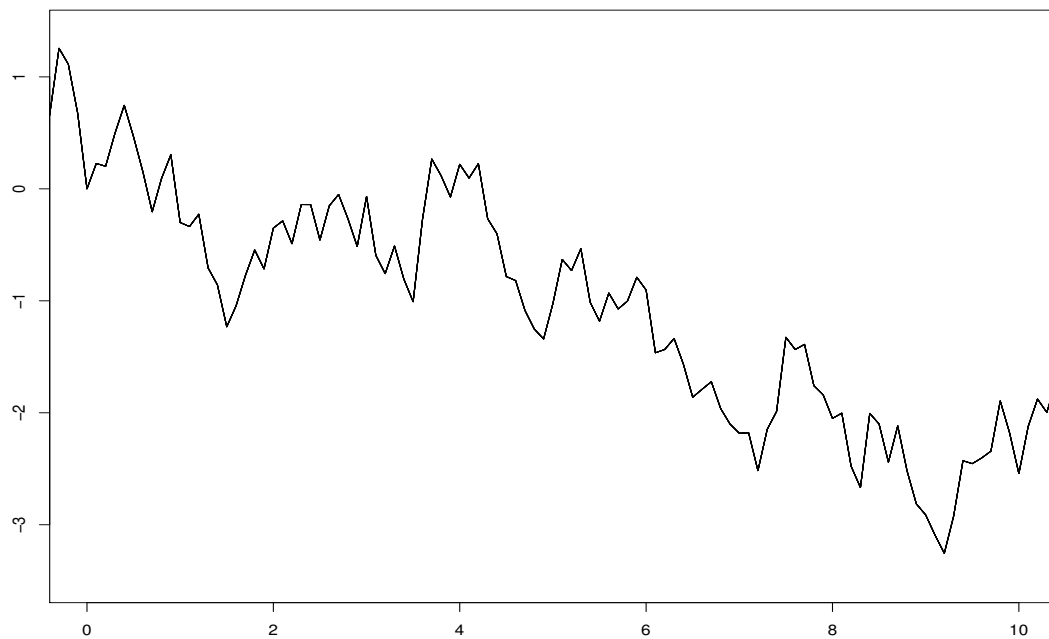


FIGURE 1.23 – Diffusion de Brox inhomogène : cas sous-critique (fort) (2)



**Première partie**

**Diffusions inhomogènes en milieux  
déterministes**



## Chapter 2

# Existence and asymptotic behaviour of some time-inhomogeneous diffusions

**Abstract:** Let us consider a solution of a one-dimensional stochastic differential equation driven by a standard Brownian motion with time-inhomogeneous drift coefficient  $d(t, x) = \rho \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha/t^\beta$ . This process can be viewed as a Brownian motion evolving in a potential, possibly singular, depending on time. We prove results on the existence and uniqueness of solution, study its asymptotic behaviour and made a precise description, in terms of parameters  $\rho$ ,  $\alpha$  and  $\beta$ , of the recurrence, transience and convergence. More precisely, asymptotic distributions, iterated logarithm type laws and rates of transience and explosion are proved for such processes.

**Key words:** time-inhomogeneous diffusions; time dependent potential; singular stochastic differential equations; explosion times; scaling transformations and change of time; recurrence and transience; iterated logarithm type laws; asymptotic distributions.

**2000 Mathematics Subject Classification:** 60J60; 60H10; 60J65; 60G17; 60F15; 60F05.

This chapter is to appear in  
*Annales de l'Institut Henry Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*

## 2.1 Introduction

Let  $X$  be a one-dimensional process describing a Brownian motion dynamics in a moving, possibly singular, potential  $V_{\rho,\alpha,\beta}$ :

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \partial_x V_{\rho,\alpha,\beta}(t, X_t) dt, \quad X_{t_0} = x_0, \quad (2.1.1)$$

with,

$$V_{\rho,\alpha,\beta}(t,x) := \frac{-2\rho}{\alpha+1} \frac{|x|^{\alpha+1}}{t^\beta}, \quad \text{if } \alpha \neq -1 \quad \text{and} \\ V_{\rho,\alpha,\beta}(t,x) := \frac{-2\rho \log|x|}{t^\beta}, \quad \text{if } \alpha = -1, \quad (2.1.2)$$

where  $B$  denotes a standard linear Brownian motion,  $t_0 > 0$  and  $x_0, \rho, \alpha, \beta$  are some real constants. In this paper we shall study the asymptotic behaviour of such process. More precisely, our main goal is to give conditions which characterise the recurrence, transience and convergence in terms of parameters  $\rho, \alpha$  and  $\beta$ . Here are the natural questions one can ask: does there exist pathwise unique strong solution  $X$  for equation (2.1.1)? is this solution  $X$  recurrent or transient? does there exist a well chosen normalisation of  $X$  to ensure that the normalised process converges in distribution or almost surely? is it possible to obtain pathwise largest deviations of  $X$ , for instance iterated logarithm type law?

Questions as the last two ones are treated in [10, 13, 85] for different equations having some common features with (2.1.1). For instance, Gihman and Skorohod in [10], Chap. 4, §17, consider the following equation

$$dY_t = dB_t + d(Y_t)dt, \quad \text{with } d(y) \underset{|y| \rightarrow \infty}{\sim} \rho |y|^\alpha, \quad \rho > 0 \quad \text{and} \quad -1 < \alpha < 1. \quad (2.1.3)$$

Under additional assumptions, one proves that  $Y_t$  is transient and asymptotically behaves as a solution of the deterministic underlying dynamical system, that is

$$Y_t \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} h_t \quad \text{a.s.,} \quad \text{with} \quad h'_t = d(h_t).$$

Equation (2.1.3) is also considered by Appleby and Wu [85] with particular  $\alpha = -1$ . Its study is related to the Bessel process and the situation is more difficult. One proves that  $Y_t$  satisfies the iterated logarithm law and recurrence or transience depends on the position of  $\rho$  with respect to  $1/2$ . Appleby and Mackey [13] study the following damped stochastic differential equation

$$dY_t = \sigma(t)dB_t + d(Y_t)dt, \quad \text{with } d(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \rho \operatorname{sgn}(y)|y|^\alpha, \quad \rho < 0 \quad \text{and} \quad \alpha > 1. \quad (2.1.4)$$

Here the diffusion coefficient  $\sigma \in L^2$  is such that  $\sigma(t) \downarrow 0$ , as  $t \rightarrow \infty$ . It is proved that  $Y_t$  converges almost surely to 0 with polynomial rate. We will see that equation (2.1.4) is connected to equation (2.1.1) by performing a suitable change of time.

For time-homogeneous stochastic differential equations driven by a one-dimensional Brownian motion, there exist precise criteria for recurrence or transience (see, for instance, Kallenberg [7], Chap. 23), or explosion (see, for instance, Ikeda and Watanabe [86], Chap. VI, §3), using the scale function. Some of these criteria are extended to the time-inhomogeneous situation for dimension greater or equal than two in Bhattacharya and Ramasubramanian [87]. Unfortunately, the results in [87] do not apply to equation (2.1.1), even it is stated that the method can be adapted to the one-dimensional case. Recall also that there exist some general results on recurrence or transience (see, for instance, Has'minskii [88], Chap. III), and explosion (see for instance Narita [89] or Stroock and Varadhan [90], Chap. 10), based on the construction of some convenient Lyapunov functions. However, for equation (2.1.1), the construction of such functions seems to be more delicate.

Equation (2.1.1) can be also viewed as a continuous counterpart of a discrete time model considered recently by Menshikov and Volkov [1]. Indeed, the discrete time process studied in [1] is a random walk on the real positive half line such that

$$\mathbb{E}(X_{t+1} - X_t \mid X_t = x) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \rho \frac{x^\alpha}{t^\beta}.$$

The authors establish when the process is recurrent or transient for certain values of parameters  $\rho, \alpha, \beta$ , give the answer to a open question concerning the Friedman's urn model (see Freedman [2]), and present some open problems. Their approach is based on a precise study of some submartingales and supermartingales.

Contrary to the discrete time model one firstly needs to study the existence, uniqueness and explosion of solutions for (2.1.1). In the present paper different situations are distinguished, following the values of  $\rho$  and  $\alpha$ , and existence and uniqueness are proved. We point out that, when  $\alpha < 0$ , the existence of a solution is not obvious, since the drift has a singularity. For the time-homogeneous case, a solution to this problem is given by Cherny and Engelbert in [6], by using the scale function. These ideas do not apply to one-dimensional time-inhomogeneous stochastic differential equations, and this is the main difficulty of this part of our paper. Our idea is to use an appropriate change of time, taking full advantage of the scaling property of the Brownian motion, of the Girsanov transformation, but also of the classification of isolated singular points in [6]. These different tools, adapted to continuous time models, also allow to answer the question of explosion of the solution when  $\alpha > 1$ . As an example, we point out that, when  $2\beta > \alpha + 1$ , the solution explodes in finite time with a positive probability, but not almost surely.

Another goal of the present paper is to describe, for all values of parameters  $\rho, \alpha, \beta$ , the recurrent or the transient feature of the solution, but also its convergence. We present in Figure 2.1 the diagram of phase transition that we obtain in the attractive case  $\rho < 0$ .

Note that  $\alpha \leq -1$  is not allowed, since in that case, any solution is only defined up to the time of first reaching 0 (which is finite almost surely), and cannot be continued after it has reached this point. The critical line separating the two phases (*recurrence* and *convergence toward 0*) is  $\beta = 0$  and on this line the process is recurrent. The line  $2\beta = \alpha + 1$  could be called subcritical, in the sense that, the rate of the asymptotic behaviour is different on both sides. As for the proof of the existence, we use a suitable scaling transformation to obtain the asymptotic distribution of

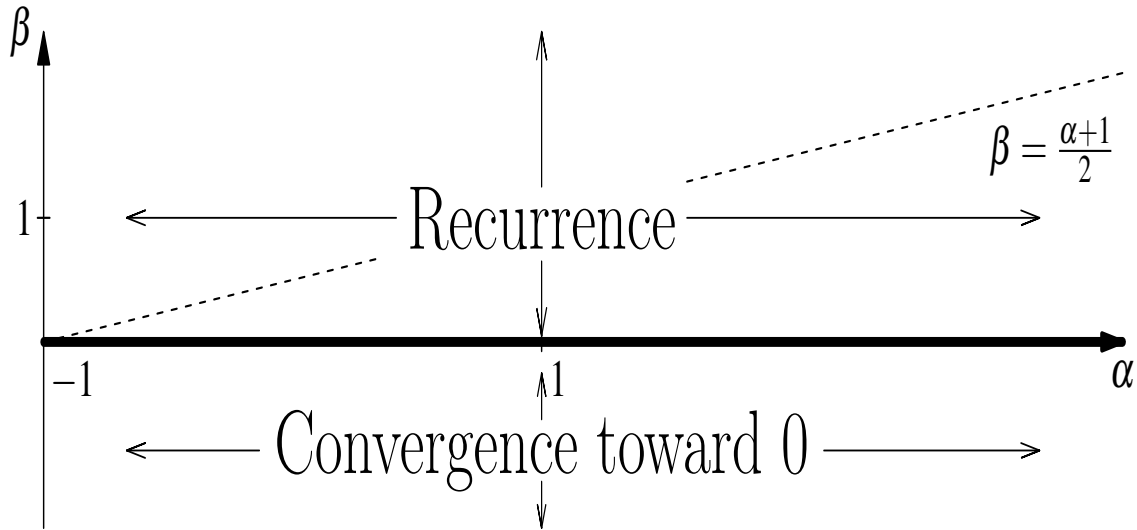


Figure 2.1: Phase transition in the attractive case

$X$  and its pathwise largest deviations, under a convenient normalisation. In fact, we show that the asymptotic behaviour of the process is strongly connected to the paths, and to the stationary distribution, of an ergodic diffusion. For example, when  $2\beta < \alpha + 1$ , if  $\varphi$  is the positive solution of  $\varphi'(t) = \varphi(t)^{\frac{2\beta}{\alpha+1}}$ , then

$$\frac{X_{\varphi(t)}}{\sqrt{\varphi'(t)}} \quad \text{"behaves as"} \quad H_t = B_t + \int_0^t \rho \operatorname{sgn}(H_s) |H_s|^\alpha ds.$$

We obtain the convergence in distribution of  $X_t/t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}$  to the stationary distribution of  $H$ , and also its pathwise largest deviation. In particular, when  $\beta < 0$ , we get the so-called polynomial stability of  $X$ . Furthermore, note that, if we set  $Y_t := X(\phi_t)$ , with  $\phi_t := t^{\frac{1}{1-\beta}}$ , then  $Y_t$  satisfies the damped stochastic differential equation (2.1.4). We prove similar results as in [13] under slightly different hypothesis, and we obtain sharp rates of convergence.

We present in Figure 2.2 the diagram of phase transition that we obtain in the repulsive case  $\rho > 0$ . When  $\alpha > 1$  and  $2\beta \leq \alpha + 1$  the explosion time is almost surely finite. The critical curve is composed from two half-lines,  $\beta = 0$ , when  $\alpha \leq -1$ , and  $2\beta = \alpha + 1$ , when  $\alpha \geq -1$ , and the process is either recurrent or transient. We prove similar results as in [1], and again we obtain sharp rates of convergence. On the critical curve one needs to distinguish two particular points  $(-1, 0)$  and  $(1, 1)$ , because these are the only cases where recurrence and transience depend on the position of  $\rho$  with respect to  $1/2$ .  $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$  corresponds to the well known Bessel process, whereas  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  is a continuous time counterpart of the Friedman's urn model. In the latter case, we obtain similar results as in [2] and [1], concerning recurrence and transience, but also regarding the asymptotic distribution and the pathwise largest deviations. For the other points of the critical curve, the process is recurrent. We point out that this is an open problem in [1]. The lines  $\alpha = -1$  and  $\alpha = 1$  could be called subcritical, in the sense that, the behaviour of the process is slightly different to the right or left. In particular, the domain of recurrence



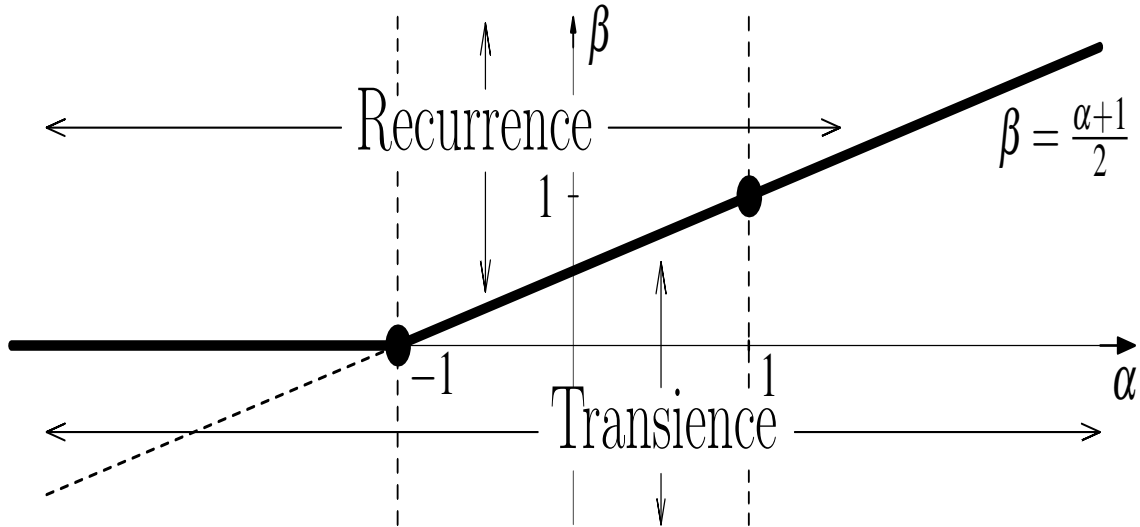


Figure 2.2: Phase transition in the repulsive case

depends on  $\alpha$ . The proof of recurrence is based on the same ideas as for the attractive case: by an appropriate scaling transformation of  $X$  we associate an ergodic diffusion, whose asymptotic behaviour is easier to obtain. For instance, when  $2\beta > \alpha + 1$  and  $-1 < \alpha < 1$ , we show that

$$\frac{X_{e^t}}{e^{\frac{t}{2}}} \quad \text{"behaves as"} \quad U_t = B_t - \int_0^t \frac{U_s}{2} ds.$$

We get that  $X$  behaves as a standard Brownian motion: it satisfies the iterated logarithm law and  $X_t/\sqrt{t}$  converges in distribution to a standard Gaussian random variable. Roughly speaking, this means that the drift is asymptotically negligible compared to the noise. Concerning the proof of the transient case, when  $\alpha < 1$ , the tools are similar to those used in [1]. We obtain similar results as in [10], for equation (2.1.3), and we show that  $X$  behaves as a solution of the deterministic underlying dynamical system, that is

$$|X_t| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} |h_t| \quad \text{a.s., with} \quad h'_t = \rho \operatorname{sgn}(h_t) \frac{|h_t|^\alpha}{t^\beta}.$$

Some results in the present paper could be obtained, with similar arguments, for a general potential  $V$ , under convenient assumptions, for instance, when  $\partial_x V(t, x) = -2f(t)g(x)$  with  $f(t) \sim_{t \rightarrow \infty} t^{-\beta}$  and  $|g(x)| \sim_{|x| \rightarrow \infty} \rho|x|^\alpha$ . These results will be presented elsewhere. The case of a multiplicative noise seems more difficult. Another interesting situation is obtained when one replaces the Brownian motion by a (stable) Lévy process, and it is object of some works in progress. Some methods in the present paper can be used in the study of a time-inhomogeneous diffusion in random environment of the form  $V(t, x) = t^{-\beta} W(x)$ , with  $W$  a self-similar process (for instance, a Brownian motion). This situation it is also object of some works in progress.

The paper is organised as follows: in the next section we introduce the scaling transformations and list the associated equations associated to some particular transformations. In Section

3 we perform the complete study of the existence, uniqueness and explosion of the solutions for equation (2.1.1). Section 4 is devoted to a systematic study of the asymptotic behaviour of the solutions. Three cases are considered: on the critical line  $2\beta = \alpha + 1$ , above and under this line. Proofs of some technical results are given in the Appendix.

## 2.2 Scaling transformation and associated equations

We shall study equation (2.1.1) in its equivalent form:

$$dX_t = dB_t + \rho \operatorname{sgn}(X_t) \frac{|X_t|^\alpha}{t^\beta} dt, \quad X_{t_0} = x_0, \quad (2.2.1)$$

$B$  being a standard Brownian motion defined on a filtered probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . By symmetry of the equation and by the usual scaling transformation, we can assume without loss of generality that  $x_0 \geq 0$  and  $t_0 = 1$ . We will keep these assumptions all along the paper.

We begin by defining a transformation of equation (2.2.1) which takes full advantage of the scaling property of the Brownian motion  $B$  and the homogeneous properties of the drift  $d(t, x) := \rho \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha/t^\beta$ , that is for any  $\lambda, \mu > 0$ ,

$$(t \mapsto B_{\lambda t}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t \mapsto \lambda^{\frac{1}{2}} B_t) \quad \text{and} \quad d(\mu t, \lambda x) = \lambda^\alpha \mu^{-\beta} d(t, x).$$

This transformation will provide some important equations related to our problem and it will be useful later to study the existence, the uniqueness and the asymptotic behaviour of solutions of equation (2.2.1).

### 2.2.1 Scaling transformation

For any  $T \in (0, \infty]$ , let  $\overline{C}([0, T])$  be the set of functions  $\omega : [0, T) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\Delta\}$  such that there exists a time  $\tau_e(\omega) \in (0, T]$  (called the killing time of  $\omega$ ) such that  $\omega$  is continuous on  $[0, \tau_e(\omega))$  and  $\omega = \infty$  on  $[\tau_e(\omega), T)$ . We set  $\Omega := \overline{C}([1, \infty))$  and  $\Omega^* := \overline{C}([0, t_1))$ , with  $t_1 \in (0, \infty]$ . For every  $C^2$ -diffeomorphism (change of time)  $\varphi : [0, t_1) \rightarrow [1, \infty)$  we introduce the scaling transformation  $\Phi_\varphi : \Omega \rightarrow \Omega^*$  given by

$$\Phi_\varphi(\omega)(s) := \frac{\omega(\varphi(s))}{\sqrt{\varphi'(s)}}, \quad \text{with } s \in [0, t_1), \omega \in \Omega. \quad (2.2.2)$$

**Proposition 2.2.1.** *The scaling transformation  $\Phi_\varphi$  induces a bijection between weak solutions (possibly explosive) of equation (2.2.1) and weak solutions (possibly explosive) of equation*

$$dX_s^{(\varphi)} = dW_s + \rho \frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^\beta} \operatorname{sgn}(X_s^{(\varphi)}) |X_s^{(\varphi)}|^\alpha ds - \frac{\varphi''(s)}{\varphi'(s)} \frac{X_s^{(\varphi)}}{2} ds, \quad X_0^{(\varphi)} = \frac{x_0}{\sqrt{\varphi'(0)}}. \quad (2.2.3)$$

Here  $\{W_s : s \in [0, t_1)\}$  denotes a standard Brownian motion. More precisely,

i) if  $(X, B)$  is a solution of equation (2.2.1) then  $(X^{(\varphi)}, W)$  is a solution of equation (2.2.3) where

$$X^{(\varphi)} = \Phi_\varphi(X) \quad \text{and} \quad W_t := \int_0^t \frac{dB(\varphi(s))}{\sqrt{\varphi'(s)}}; \quad (2.2.4)$$

ii) if  $(X^{(\varphi)}, W)$  is a solution of equation (2.2.3) then  $(X, B)$  is a solution of equation (2.2.1) where

$$X = \Phi_{\varphi}^{-1}(X^{(\varphi)}) \quad \text{and} \quad B_t - B_1 := \int_1^t \sqrt{(\varphi' \circ \varphi^{-1})(s)} dW(\varphi^{-1}(s)). \quad (2.2.5)$$

It follows that uniqueness in law, pathwise uniqueness or strong existence holds for equation (2.2.1) if, and only if, it holds for equation (2.2.3).

**Proof.** Let  $(X, B)$  be a solution of equation (2.2.1). By using P. Lévy's characterisation theorem of Brownian motion, we can see that  $W$  defined in (2.2.4) is a standard Brownian motion. Moreover, by performing the change of variable  $t := \varphi(s)$  in (2.2.1), we get

$$X_{\varphi(s)} - X_{\varphi(0)} = \int_0^s \sqrt{\varphi'(u)} dW_u + \rho \int_0^s \operatorname{sgn}(X_{\varphi(u)}) \frac{|X_{\varphi(u)}|^{\alpha}}{\varphi(u)^{\beta}} \varphi'(u) du.$$

By the integration by parts formula written in its differential form we obtain

$$d\left(\frac{X_{\varphi(s)}}{\sqrt{\varphi'(s)}}\right) = dW_s + \rho \frac{\varphi'(s)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\varphi(s)^{\beta}} \operatorname{sgn}\left(\frac{X_{\varphi(s)}}{\sqrt{\varphi'(s)}}\right) \left|\frac{X_{\varphi(s)}}{\sqrt{\varphi'(s)}}\right|^{\alpha} ds - \frac{X_{\varphi(s)}}{\sqrt{\varphi'(s)}} \frac{\varphi''(s)}{2\varphi'(s)} ds.$$

We conclude that equation (2.2.3) is satisfied by  $(X^{(\varphi)}, W)$ . The proof of (2.2.5) is similar by noting that  $\Phi_{\varphi}$  is a bijection and its inverse function is given by

$$\Phi_{\varphi}^{-1}(\omega)(s) = \sqrt{\varphi' \circ \varphi^{-1}(s)} \omega(\varphi^{-1}(s)), \quad \text{with } s \in [1, \infty), \omega \in \Omega^*.$$

The final remark is a simple application of parts i) and ii). □

## 2.2.2 Two particular transformations

We give here two scaling transformations which produce at least one time-homogeneous coefficient among the two terms of the drift in (2.2.3).

We also introduce some equations related to (2.2.1) which will be useful later in our study. For simplicity, we will keep the notation  $W$  for a standard Brownian motion which can be different from the process employed in Proposition 2.2.1.

### 1. Exponential scaling transformation

The transformation (2.2.2) associated to the exponential change of time  $\varphi_e(t) := e^t$ , and denoted by  $\Phi_e$ , is given by

$$\Phi_e(\omega)(s) = \frac{\omega(e^s)}{e^{s/2}}, \quad \text{with } s \in [0, \infty), \omega \in \Omega.$$

The process  $X^{(e)} := \Phi_e(X)$  satisfies equation (2.2.3) which can be written

$$dX_s^{(e)} = dW_s - \frac{X_s^{(e)}}{2} ds + \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)s} \operatorname{sgn}(X_s^{(e)}) |X_s^{(e)}|^\alpha ds, \quad X_0^{(e)} = x_0. \quad (2.2.6)$$

On the one hand, if we leave out the third term in the right hand side of equation (2.2.6), we obtain the classical equation of the Ornstein-Uhlenbeck process:

$$dU_s = dW_s - \frac{U_s}{2} ds, \quad U_0 = x_0. \quad (2.2.7)$$

Note that equation (2.2.7) is a particular case of equation (2.2.1) with parameters  $\rho = -1/2$ ,  $\alpha = 1$  and  $\beta = 0$ . On the other hand, when  $\alpha = -1$ , by Ito's formula we can see that  $Y := X^2$  satisfies

$$dY_t = 2\sqrt{Y_t} dW_t + \left(\frac{2\rho}{\beta} + 1\right) dt, \quad Y_0 = x_0^2, \quad Y \geq 0. \quad (2.2.8)$$

This process can be viewed as a square Bessel process whose dimension depends on time. Clearly, when  $\beta = 0$ , this process is the classical square Bessel process  $R$  of dimension  $2\rho + 1$  and it satisfies

$$dR_t = 2\sqrt{R_t} dW_t + (2\rho + 1) dt, \quad R_0 = x_0^2, \quad R \geq 0. \quad (2.2.9)$$

Furthermore, the process  $R^{(e)} := \Phi_e(R)$  satisfies

$$dR_t^{(e)} = 2\sqrt{R_t^{(e)}} dW_t + \left(2\rho + 1 - \frac{R_t^{(e)}}{2}\right) dt, \quad R_0^{(e)} = x_0^2, \quad R^{(e)} \geq 0. \quad (2.2.10)$$

## 2. Power scaling transformation

Assume that  $\alpha \neq -1$  and consider the Cauchy problem:

$$\varphi'_\gamma(s) = \varphi_\gamma(s)^\gamma, \quad \varphi_\gamma(0) = 1, \quad \text{with} \quad \gamma := \frac{2\beta}{\alpha+1}. \quad (2.2.11)$$

There exists a unique maximal solution  $\varphi_\gamma \in C^2([0, t_1]; [1, \infty))$  and we can see that

$$\varphi_\gamma(s) = (1 + (1 - \gamma)s)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad \text{when} \quad \gamma \neq 1 \quad \text{and} \quad \varphi_\gamma(s) = e^s, \quad \text{when} \quad \gamma = 1,$$

with  $t_1 = \infty$ , when  $\gamma \in (-\infty, 1]$ , and  $t_1 = 1/(\gamma - 1)$ , when  $\gamma \in (1, \infty)$ . The transformation (2.2.2) associated to this change of time will be denoted  $\Phi_\gamma$ , and is given by

$$\Phi_\gamma(\omega)(s) = \frac{\omega(\varphi_\gamma(s))}{\varphi_\gamma(s)^{\frac{\gamma}{2}}}, \quad \text{with} \quad s \in [0, t_1), \quad \omega \in \Omega.$$

The process  $X^{(\gamma)} := \Phi_\gamma(X)$  satisfies equation (2.2.3) which can be written

$$dX_s^{(\gamma)} = dW_s + \rho \operatorname{sgn}(X_s^{(\gamma)}) |X_s^{(\gamma)}|^\alpha ds - \gamma \varphi_\gamma^{\gamma-1}(s) \frac{X_s^{(\gamma)}}{2} ds, \quad \text{with} \quad X_0^{(\gamma)} = x_0, \quad s \in [0, t_1). \quad (2.2.12)$$

i) If  $\gamma \in (-\infty, 1)$ , equation (2.2.12) takes the form:

$$dX_s^{(\gamma)} = dW_s + \rho \operatorname{sgn}(X_s^{(\gamma)}) |X_s^{(\gamma)}|^\alpha ds - \frac{\gamma X_s^{(\gamma)}}{2(1 + (1 - \gamma)s)} ds, \quad \text{with } X_0^{(\gamma)} = x_0, s \in [0, \infty). \quad (2.2.13)$$

ii) If  $\gamma \in (1, \infty)$ , equation (2.2.12) takes the form:

$$dX_s^{(\gamma)} = dW_s + \rho \operatorname{sgn}(X_s^{(\gamma)}) |X_s^{(\gamma)}|^\alpha ds - \delta \frac{X_s^{(\gamma)}}{t_1 - s} ds, \quad \text{with } X_0^{(\gamma)} = x_0, s \in [0, t_1), \quad (2.2.14)$$

and

$$t_1 = \frac{1}{\gamma - 1} \quad \text{and} \quad \delta := \frac{\gamma}{2(\gamma - 1)}.$$

iii) If  $\gamma = 1$ , equation (2.2.12) takes the form:

$$dZ_s = dW_s + \left( \rho \operatorname{sgn}(Z_s) |Z_s|^\alpha - \frac{Z_s}{2} \right) ds, \quad Z_0 = x_0, \quad s \in [0, \infty). \quad (2.2.15)$$

Note that the transformations  $\Phi_e$  and  $\Phi_\gamma$  coincide when  $\gamma = 1$ . Finally, let us introduce another two stochastic differential equations related to (2.2.12). First, we leave out the third term on the right hand side of (2.2.12) and we get

$$dH_s = dW_s + \rho \operatorname{sgn}(H_s) |H_s|^\alpha ds, \quad H_0 = x_0, \quad s \in [0, t_1). \quad (2.2.16)$$

Note that the latter equation is nothing but (2.2.1) with  $\beta = 0$ . Second, we leave out the second term in the right hand side of (2.2.14) and we obtain

$$db_s = dW_s - \delta \frac{b_s}{t_1 - s} ds, \quad b_0 = x_0, \quad s \in [0, t_1). \quad (2.2.17)$$

The process  $b$  is the so-called  $\delta$ -Brownian bridge (see also [11]) and it is the classical Brownian bridge when  $\delta = 1$ .

## 2.3 Preliminary study of solutions

In this section we study existence, uniqueness and explosion of solutions for equation (2.2.1). For parameters  $(\rho, \alpha, \beta) \in ((-\infty, 0] \times (-1, \infty) \times \mathbb{R}) \cup ([0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  and  $x_0 \in [0, \infty)$  we prove the existence of a time-inhomogeneous diffusion  $X$  solution of equation (2.2.1), defined up to the explosion time, and taking its values in  $\mathbb{R}$ , provided  $\alpha \in (-1, \infty)$ , in  $(0, \infty)$ , provided  $\alpha \in (-\infty, -1)$  and in  $[0, \infty)$ , provided  $\alpha = -1$ . We show that this diffusion can explode in finite time with positive probability when  $(\rho, \alpha, \beta) \in (0, \infty) \times (1, \infty) \times \mathbb{R}$ .

### 2.3.1 Existence and uniqueness

Existence and uniqueness for equation (2.2.1) are not obvious since the drift could be singular in 0 and/or not time-homogeneous.

However, with the help of transformation (2.2.2), the Girsanov transformation and the results on power equations in [6], chap. 5, we reduce to the study of equation (2.2.16) when  $\alpha \neq -1$ . The following remark is stated only for later reference.

**Remark 2.3.1.** *Assume that  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . The Girsanov transformation induces a linear bijection between weak solutions (respectively nonnegative solutions or positive solutions) defined up to the explosion time of equation (2.2.12) and weak solutions (respectively nonnegative solutions or positive solutions) defined up to the explosion time of equation (2.2.16).*

#### 1. Locally integrable singularity : $\alpha > -1$

In this case  $x \mapsto |x|^\alpha$  is locally integrable. As for equation (2.2.16), we show that there exists a pathwise unique strong solution  $X$  to equation (2.2.1) defined up to the explosion time.

**Proposition 2.3.2.** *If  $\alpha \in (-1, \infty)$ ,  $\beta, \rho \in \mathbb{R}$ , there exists a pathwise unique strong solution  $X$  to equation (2.2.1) defined up to the explosion time.*

**Proof.** By using Proposition 2.2 in [6], p. 28, there exists a unique weak solution  $H$  to the time-homogeneous equation (2.2.16) defined up to the explosion time. Therefore, by using Remark 2.3.1, there exists a unique weak solution  $X^{(\gamma)}$  to equation (2.2.12) and, by using Proposition 2.2.1, there exists a unique weak solution  $X$  to equation (2.2.1). Moreover, since pathwise uniqueness holds for equation (2.2.1) by using Proposition 3.2 and Corollary 3.4, Chap. IX in [4], pp. 389-390, we get the conclusion. Note that for the nonsingular case  $\alpha \geq 0$ , the coefficients of equation (2.2.1) are continuous, hence the present proposition can be obtained by usual techniques (localisation, Girsanov and Novikov theorems).  $\square$

Let us denote by  $\mathcal{L}(\pm X)$  the distribution of the process  $\pm X$ . We shall say that a probability distribution  $\mu$  is a *mixture of distributions of  $X$  and  $-X$* , if there exists  $\lambda \in [0, 1]$  such that  $\mu = \lambda \mathcal{L}(X) + (1 - \lambda) \mathcal{L}(-X)$ . Equivalently, there exists a discrete random variable  $U \in \{-1, +1\}$ , independent of  $X$ , such that  $\mu = \mathcal{L}(UX)$ .

## 2. Nonlocally integrable singularity : $\alpha < -1$ and $\rho > 0$

Again, it suffices to study equation (2.2.16). We shall see that there exists a pathwise unique nonnegative solution  $X$  to equation (2.2.1) and there are several strong Markov weak solutions when the process start at the singularity  $x_0 = 0$ .

**Proposition 2.3.3.** *If  $\alpha \in (-\infty, -1)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  and  $\rho \in (0, \infty)$ , there exists a pathwise unique nonnegative strong solution  $X$  to equation (2.2.1). Moreover,*

- i) if  $x_0 \in (0, \infty)$ ,  $X$  is the pathwise unique strong solution and it is positive;*
- ii) if  $x_0 = 0$ , for all  $t > 1$ ,  $X_t > 0$  a.s. and the set of all weak solutions is the set of all distributions which are mixture of distributions of  $X$  and  $-X$ .*

**Proof.** By using Theorem 3.5 in [6], p. 66, there exists a unique nonnegative weak solution  $H$  to equation (2.2.16) defined up to the explosion time. We deduce, following the same lines as in the proof of the previous proposition, that there exists a pathwise unique nonnegative strong solution to equation (2.2.1). We point out that there is no uniqueness in law for equation (2.2.1) when  $x_0 = 0$  and we cannot apply directly Proposition 3.2, Chap. IX in [4], p. 389, to prove the pathwise uniqueness. However, we can check that a similar result to the cited proposition, whose the proof can be imitated, holds for nonnegative solutions.

Moreover, if  $x_0 \in (0, \infty)$ , any weak solution of equation (2.2.16) is positive and we deduce that there exists a pathwise unique strong solution to equation (2.2.1) and this solution is positive.

Finally, if  $x_0 = 0$ , the set of all weak solutions of equation (2.2.16) is (by symmetry of the equation) the set of all distributions which are mixture of the distributions of  $H$  and  $-H$ . We deduce the point ii) and the proof is done.  $\square$

## 3. Bessel type case: $\alpha = -1$ and $\rho > 0$

In this case, Remark 2.3.1 does not hold and we perform a direct study of (2.2.1). We show that there exists a pathwise unique nonnegative strong solution  $X$  to equation (2.2.1), which can be viewed as a Bessel process whose the dimension  $2\rho t^{-\beta} + 1$  depends on time. Note that it is possible that there exists different weak solutions (not necessary Markovian).

**Proposition 2.3.4.** *If  $\alpha = -1$ ,  $\rho \in (0, \infty)$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ , there exists a pathwise unique nonnegative strong solution  $X$  to equation (2.2.1). Moreover,*

- i) if  $\rho \in [1/2, \infty)$ ,  $\beta \in (-\infty, 0]$  and  $x_0 \in (0, \infty)$ ,  $X$  is the pathwise unique strong solution and it is positive;*
- ii) if  $\rho \in [1/2, \infty)$ ,  $\beta \in (-\infty, 0]$  and  $x_0 = 0$ , the set of all weak solutions is the set of all distributions which are mixture of distributions of  $X$  and  $-X$  and  $\forall t > 0$ ,  $X_t > 0$  a.s.;*
- iii) if  $\beta \in (0, \infty)$  or if  $(\rho, \beta) \in (0, 1/2) \times (-\infty, 0]$ , we can construct different weak solutions to equation (2.2.1) and in the first case the set  $\{t \geq 1 : X_t = 0\}$  is unbounded a.s.*



**Proof.** To begin with, it is not difficult to see that there exists a pathwise unique nonnegative strong solution  $Y$  to equation (2.2.8). This process can be viewed as the squared Bessel process having a time-dependent dimension  $2\rho t^{-\beta} + 1$ . We shall prove that  $X := \sqrt{Y}$  is a nonnegative weak solution of equation (2.2.1). By applying Ito's formula, for all  $t \geq 1$  and  $\varepsilon > 0$ ,

$$(X_t^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = (x_0^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \int_1^t \left( \frac{X_s^2}{X_s^2 + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} dW_s + \int_1^t \frac{\rho ds}{s^\beta (X_s^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + \int_1^t \frac{\varepsilon ds}{2(X_s^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.3.1)$$

We let  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (2.3.1). Firstly, it is clear that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^t \left( \frac{X_s^2}{X_s^2 + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} dW_s = W_t - W_1, \quad \text{in probability.}$$

Secondly, by monotone convergence theorem, the third term in the right hand side of (2.3.1) converges a.s. We show that the limit is finite a.s. and that the fourth term converges toward 0 in probability by comparison with a squared Bessel process. To this end, let us consider the pathwise unique nonnegative strong solution of

$$Q_s = x_0 + W_s - W_1 + \int_1^s \frac{\rho_1}{Q_u} du, \quad s \geq 1, \quad \text{with } \rho_1 := \inf \left\{ \frac{\rho}{s^\beta} : s \in [1, t] \right\} > 0. \quad (2.3.2)$$

$Q$  is a classical Bessel process of dimension  $2\rho_1 + 1$ . By using a comparison theorem (see Theorem 1.1, Chap. VI in [11], p. 437) and Ito's formula, we can see that for all  $s \in [1, t]$ ,  $X_s^2 \geq Q_s^2$  and

$$(Q_t^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = (x_0^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \int_1^t \left( \frac{Q_s^2}{Q_s^2 + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} dW_s + \int_1^t \frac{\rho_1 ds}{(Q_s^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + \int_1^t \frac{\varepsilon ds}{2(Q_s^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Since  $Q$  is a solution of (2.3.2) we obtain, by letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  in the latter equality,

$$\int_1^t \frac{\rho ds}{s^\beta X_s} \leq \int_1^t \frac{\rho_2}{Q_s} ds < \infty \quad \text{a.s. with } \rho_2 := \sup \left\{ \frac{\rho}{s^\beta} : s \in [1, t] \right\} < \infty,$$

and also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^t \frac{\varepsilon ds}{(X_s^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^t \frac{\varepsilon ds}{(Q_s^2 + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = 0, \quad \text{in probability.}$$

We get that  $X$  is a nonnegative weak solution of (2.2.1). Pathwise uniqueness is obtained by using the same arguments as in the proof of Propositions 2.3.2 and 2.3.3 and we deduce that there exists a pathwise unique nonnegative strong solution  $X$  to equation (2.2.1). We proceed with the proof of points i)-iii) in the statement of the proposition.

Firstly, if  $\rho \in [1/2, \infty)$ ,  $\beta \in (-\infty, 0]$  and  $x_0 \in (0, \infty)$ , the inequality  $2 \leq 2\rho t^{-\beta} + 1$  holds for all  $t \geq 1$  and we deduce that  $X$  is positive by comparison with a Bessel process of dimension 2.

Secondly, if  $\rho \in [1/2, \infty)$ ,  $\beta \in (-\infty, 0]$  and  $x_0 = 0$ , the same comparison can be used to see that every solution  $\tilde{X}$  of (2.2.1) satisfies  $\tilde{X}_t^2 \neq 0$ , for all  $t > 1$  a.s. Let us introduce

$$\Omega^\pm := \{\omega \in \Omega : \forall t > 1, \pm \tilde{X}_t > 0\} \quad \text{and} \quad \mathbb{P}^\pm := \mathbb{P}(\cdot | \Omega^\pm).$$

For all  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega^\pm = \{\omega \in \Omega : \forall 1 < t < 1 + \varepsilon, \pm \tilde{X}_t > 0\} \in \mathcal{F}_{1+\varepsilon}$  and then  $\Omega^\pm \in \mathcal{F}_{1+}$ . Therefore, the standard Brownian motion  $\{B_t - B_1\}_{t \geq 1}$  under  $\mathbb{P}$  is again a standard Brownian motion under probabilities  $\mathbb{P}^\pm$ . By uniqueness of the nonnegative weak solution and also, by symmetry, of the nonpositive solution of (2.2.1), the distribution of  $\tilde{X}$  under  $\mathbb{P}^\pm$  equals to the distribution of  $\pm X$ . The point ii) is then a simple consequence.

Finally, if  $\beta \in (0, \infty)$ , for  $t$  large enough we have  $2\rho t^{-\beta} + 1 \leq \delta$ , with  $\delta \in (0, 1)$ . By comparison with a Bessel process of dimension  $\delta$ , we get that the reaching time of 0 is finite a.s. and the set  $\{t > 1 : X_t = 0\}$  is unbounded a.s. Besides, if  $X$  is a solution starting from  $x_0 = 0$ ,  $-X$  is also a solution. We deduce that different solutions could be constructed by gluing the paths of  $X$  and  $-X$  each time when the process returns in 0. If  $\rho \in (0, 1/2)$  and  $\beta \in (-\infty, 0)$ , for all  $s \in [1, (2\rho)^{1/\beta})$  and  $t \in [1, s]$ ,  $2\rho t^{-\beta} + 1 \leq 2\rho s^{-\beta} + 1$ . We deduce by comparison with a Bessel process of dimension  $2\rho s^{-\beta} + 1 \in (1, 2)$  that the reaching time of 0 belongs to  $[1, (2\rho)^{1/\beta})$  with a positive probability. Indeed, the reaching time of 0 for a Bessel process of this dimension has a positive density with respect to the Lebesgue measure (with an explicit expression given, for instance, in [91], p. 537). As in the preceding case, different solutions can be constructed.  $\square$

**Remark 2.3.5.** *By using similar methods as in Propositions 2.3.2, 2.3.3 and 2.3.4, when  $\alpha \leq -1$  and  $\rho < 0$ , it can be proved that weak solutions of equation (2.2.1) are only defined up to the reaching time of 0, which is finite a.s. and cannot be continued after this time. This case will be not considered since is out of range for the study of the asymptotic behaviour.*

### 2.3.2 Explosion of solutions

We show that  $X$  explodes in finite time with positive probability if and only if  $\alpha \in (1, \infty)$ . More precisely, the explosion time  $\tau_e$  of  $X$  is finite a.s., provided  $2\beta \leq \alpha + 1$ , and satisfies  $\mathbb{P}(\tau_e = \infty) \in (0, 1)$ , provided  $2\beta > \alpha + 1$ .

**Proposition 2.3.6.** *The explosion time  $\tau_e$  of  $X$  is infinite a.s. if  $\rho \in (-\infty, 0)$  or  $\alpha \in (-\infty, 1]$ . It is finite a.s. if  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$  and  $2\beta \in (-\infty, \alpha + 1]$ .*

**Proof.** Assume first that  $\rho \in (-\infty, 0)$  or  $\alpha \in (-\infty, 1]$ . Let  $F$  be a twice continuous differentiable nonnegative function such that  $F(x) := 1 + x^2$  for all  $|x| \geq 1$ ,  $F(x) = 1$  for all  $x \in [1/2, 1/2]$  and  $F \geq 1$ . For all  $T \geq 1$ , we denote  $c_T$  the supremum of  $LF$  on  $[1, T] \times [-1, 1]$ , where  $L$  is the infinitesimal generator of  $X$  given by

$$L := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \operatorname{sgn}(x) \frac{|x|^\alpha}{t^\beta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.3.3)$$

It is a simple calculation to see that for all  $t \in [1, T]$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$LF(t, x) \leq c_T + \lambda_T F(t, x) \leq (c_T + \lambda_T) F(t, x), \quad \text{with} \quad \lambda_T := \sup_{1 \leq t \leq T} (1 + |\rho| t^{-\beta}).$$

By using Theorem 10.2.1 in [90], p. 254, we deduce that the explosion time  $\tau_e$  is finite a.s.

Finally, assume that  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$  and  $2\beta \in (-\infty, \alpha + 1]$ . By using Proposition 2.2.1 it suffices to show that the solution  $X^{(\gamma)}$  of equation (2.2.12) explodes in finite time a.s. Let us introduce  $Q_s$  and  $C_s$ , the pathwise unique strong solutions of

$$dQ_s = 2\sqrt{Q_s}dW_s + \left(2\rho Q_s^{\frac{\alpha+1}{2}} - |\gamma|Q_s + 1\right) ds, \quad Q_0 = x_0^2,$$

and

$$dC_s = 2\sqrt{C_s}dW_s + \left(2\rho C_s^{\frac{\alpha+1}{2}} - \gamma\varphi_Y^{\gamma-1}(s)C_s + 1\right) ds, \quad C_0 = x_0^2.$$

By using Ito's formula, we can see that the square of  $X^{(\gamma)}$  satisfies the latter equation and by weak uniqueness, we get that  $C$  and  $(X^{(\gamma)})^2$  have the same distribution. Moreover, since  $\gamma = 2\beta/(\alpha + 1) \leq 1$ , we can see that  $0 \leq \varphi_Y^{\gamma-1} \leq 1$ . By comparison theorem, we get that  $0 \leq Q_s \leq C_s$  a.s. Besides, by using Theorem 5.7 in [6], p. 97, the explosion time of the time-homogeneous diffusion  $Q$  is finite a.s. We deduce that the explosion time of  $C$ , and consequently that of  $X^{(\gamma)}$ , is finite a.s.  $\square$

**Proposition 2.3.7.** *If  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$  and  $2\beta \in (\alpha + 1, \infty)$ ,*

$$\mathbb{P}(\tau_e = \infty) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^{t_1} \rho \operatorname{sgn}(b_u)|b_u|^\alpha dW_u - \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \rho^2 |b_u|^{2\alpha} du\right)\right] \in (0, 1), \quad (2.3.4)$$

where  $b$  denotes the weak solution of equation (2.2.17) and  $\tau_e$  the explosion time of  $X$ .

**Proof.** Let  $X^{(\gamma)}$  be the pathwise unique strong solution of equation (2.2.14) and  $b$  be the pathwise unique strong solution of equation (2.2.17). Recall that  $\gamma = 2\beta/(\alpha + 1) > 1$  and  $t_1 = 1/(\gamma - 1)$ . Denote by  $\eta_e$  the explosion time of  $X^{(\gamma)}$  and note that

$$\eta_e \in [0, t_1] \cup \{\infty\} \quad \text{and} \quad \{\eta_e \geq t_1\} = \{\tau_e = \infty\} \quad \text{a.s.}$$

We need to show that  $\mathbb{P}(\eta_e \geq t_1)$  is equal to the right hand side of (2.3.4) and belongs to  $(0, 1)$ . First of all,  $b$  is a continuous process on  $[0, t_1]$ , with  $b_{t_1} = 0$  a.s., it is the so-called  $\delta$ -Brownian bridge (see Definition 1 in [11], p. 1022). By using the Girsanov transformation between  $b$  and  $X^{(\gamma)}$ , we can write for every integer  $n \geq 1$ ,  $s \in [0, t_1]$  and  $A \in \mathcal{F}_s$ ,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(X_{\bullet \wedge \eta_n}^{(\gamma)})\mathbb{1}_{\{\eta_n > s\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(b_{\bullet \wedge \sigma_n})\mathcal{E}(s \wedge \sigma_n)\mathbb{1}_{\{\sigma_n > s\}}\right],$$

where

$$\eta_n := \inf\{s \in [0, t_1] : |X_s^{(\gamma)}| \geq n\}, \quad \sigma_n := \inf\{s \in [0, t_1] : |b_s| \geq n\},$$

and

$$\mathcal{E}(s) := \exp\left(\int_0^s \rho \operatorname{sgn}(b_u)|b_u|^\alpha dW_u - \frac{1}{2}\int_0^s \rho^2 |b_u|^{2\alpha} du\right).$$

Letting  $n \rightarrow \infty$ , we obtain

$$\mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_A(X^{(\gamma)}) \mathbb{1}_{\{\eta_e > s\}} \right] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_A(b) \mathcal{E}(s) \right]. \quad (2.3.5)$$

In particular, we have proved that for all  $s \in [0, t_1]$ ,  $\mathbb{P}(\eta_e > s) = \mathbb{E}[\mathcal{E}(s)]$ . Furthermore it is clear that  $\mathbb{P}(\tau_e = \infty) = \mathbb{P}(\eta_e \geq t_1) \geq \mathbb{E}[\mathcal{E}(t_1)] > 0$ . At this level we state a technical result which proof is postponed to the Appendix.

**Lemma 2.3.8.** *Assume that  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$  and  $2\beta \in (\alpha + 1, \infty)$ , and denote by  $\eta_e \in [0, t_1] \cup \{\infty\}$  the explosion time of  $X^{(\gamma)}$  (the weak solution of (2.2.14)). Then  $\mathbb{P}(\eta_e = t_1) = 0$ .*

We deduce from this lemma that  $\mathbb{P}(\tau_e = \infty) = \mathbb{P}(\eta_e \geq t_1) = \mathbb{P}(\eta_e > t_1) = \mathbb{E}(\mathcal{E}(t_1))$  and the equality in (2.3.4) is proved. It remains to show that  $\mathbb{P}(\tau_e = \infty) < 1$ . Recall that  $\alpha \in (1, \infty)$  and let  $a \in (1, \alpha)$ . Set  $g(x) := 1 \wedge |x|^{-a}$  and note that, for any  $T > 1$ , we can choose  $k \geq 1$ , such that  $a(a-1)^{-1} = \int_0^\infty g(y)dy < k(T-1)$ . Moreover, we can see that there exists a continuous differentiable odd function  $f$ , defined on  $\mathbb{R}$ , vanishing only at  $x = 0$ , such that  $|f| \leq g$ , and

$$f(x) := kx, \quad x \in [-1/2k, 1/2k], \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\alpha |f(x)| = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f'(x) = 0.$$

For  $\mu > 0$  we introduce the bounded twice continuous differentiable function

$$F_\mu(x) := \exp\left(\mu \int_0^x f(y)dy\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

We shall apply Theorem 10.2.1 in [90], p. 254, to the diffusion  $X$ , solution of (2.2.1), with the function  $F_\mu$  for some  $\mu > 0$ . It will implies that  $\mathbb{P}(\tau_e \leq T) > 0$  for any  $T > 1$ . We need to verify that there exists  $\lambda > 0$  and  $\mu > 0$  such that for all  $t \in [1, T]$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$LF_\mu(t, x) \geq \lambda F_\mu(x) \quad \text{and} \quad \ln\left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} F_\mu(x)}{F_\mu(x_0)}\right) < \lambda(T-1). \quad (2.3.6)$$

Here  $L$  is given in (2.3.3). In order to prove (2.3.6), note that for all  $t \in [1, T]$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$LF_\mu(t, x) = \mu F_\mu(x) \left( \rho t^{-\beta} |x|^\alpha |f(x)| + \frac{\mu}{2} f^2(x) + \frac{1}{2} f'(x) \right).$$

The assumptions on  $f$  imply that there exists  $r \geq 1$  such that, for all  $\mu > 0$ ,

$$LF_\mu \geq \frac{k}{2} \mu F_\mu \quad \text{on} \quad [1, T] \times ([-1/2k, 1/2k] \cup [-r, r]^c).$$

Besides, since  $f^2$  is bounded away from zero, while  $|f'|$  is bounded on  $[-1/2k, -r] \cup [1/2k, r]$ , we deduce that there exists  $\mu_0 > 0$  such that

$$LF_{\mu_0} \geq \frac{k}{2} \mu_0 F_{\mu_0} \quad \text{on} \quad [1, T] \times ([-1/2k, -r] \cup [1/2k, r]).$$

Hence, for all  $t \in [1, T]$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,  $LF_{\mu_0}(t, x) \geq \frac{k}{2} \mu_0 F_{\mu_0}(x)$  and we can see that

$$\ln \left( \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} F_{\mu_0}(x)}{F_{\mu_0}(x_0)} \right) = \mu_0 \int_{|x_0|}^{\infty} f(y) dy \leq \mu_0 \int_0^{\infty} g(y) dy < \frac{k}{2} \mu_0 (T - 1).$$

Therefore Theorem 10.2.1 in [90] applies with  $\lambda := \frac{k}{2} \mu_0$  and  $F_{\mu_0}$  and  $X$  explodes in finite time with positive probability. This ends the proof of the proposition, excepted for Lemma 2.3.8.  $\square$

## 2.4 Asymptotic behaviour of solutions

We present here the systematic study of the recurrence, transience or convergence of the time-inhomogeneous one-dimensional diffusion  $X$  (a regular strong Markov process solution of (2.2.1)) for parameters  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P} := \mathcal{P}_- \cup \mathcal{P}_+$ , where

$$\mathcal{P}_- := (-\infty, 0) \times (-1, \infty) \times \mathbb{R} \text{ (attractive case) and } \mathcal{P}_+ := (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ (repulsive case).}$$

Set  $E_\alpha := \mathbb{R}$ , when  $\alpha \in (-1, \infty)$ ,  $E_\alpha := (0, \infty)$ , when  $\alpha \in (-\infty, -1]$ , and introduce the probability distributions  $\Lambda_{\rho, \alpha}$  and  $\Pi_{\rho, \alpha}$  on  $E_\alpha$  defined by

$$\Lambda_{\rho, \alpha}(dx) := c^{-1} e^{-V_{\rho, \alpha}(x)} e^{-x^2/2} dx \quad \text{and} \quad \Pi_{\rho, \alpha}(dx) := k^{-1} e^{-V_{\rho, \alpha}(x)} dx. \quad (2.4.1)$$

Here we denote  $c, k$  the normalization constants and

$$V_{\rho, \alpha}(x) := V_{\rho, \alpha, \beta}(1, x) = V_{\rho, \alpha, 0}(t, x) = \begin{cases} -\frac{2\rho}{\alpha+1} |x|^{\alpha+1}, & \text{if } \alpha \neq 1, \\ -2\rho \log |x|, & \text{if } \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

where  $V_{\rho, \alpha, \beta}(t, x)$  is the time-dependent potential given in (2.1.2). Besides, let us introduce the following three rate functions,

$$L(t) := (2t \ln \ln t)^{\frac{1}{2}}, \quad L_{\rho, \alpha}(t) := t^{\frac{1}{2}} (c_{\rho, \alpha} \ln \ln t)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad \text{and} \quad L_{\rho, \alpha, \beta}(t) := (c_{\rho, \alpha, \beta} t^\beta \ln t)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (2.4.3)$$

where

$$c_{\rho, \alpha} := \frac{|\alpha + 1|}{2|\rho|} \quad \text{and} \quad c_{\rho, \alpha, \beta} := \frac{|\alpha + 1 - 2\beta|}{2|\rho|}. \quad (2.4.4)$$

We shall say that the process  $X$  is *recurrent* in  $E \subset \mathbb{R}$  if, for all  $x \in E$ , the set  $\{t \geq 1 : X_t = x\}$  is unbounded a.s. and we shall say that it is *transient* if  $\lim_{t \rightarrow \tau_e} |X_t| = \infty$  a.s.

### 2.4.1 Behaviour on the critical line: $2\beta = \alpha + 1$

The scaling transformation (2.2.2) associated with the exponential change of time provides a time-homogeneous equation (2.2.15). With the help of Motoo's theorem (see Theorem 2.4.4 below) and of the ergodic theorem (see, for instance, Theorem 23.15 in [7], p. 465) we obtain the asymptotic behaviour of solutions to (2.2.1).

**Theorem 2.4.1** (Attractive case). *If  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}_-$  and  $2\beta = \alpha + 1$ ,  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$  and*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Lambda_{\rho, \alpha}. \quad (2.4.5)$$

Moreover,

i) if  $\alpha \in (-1, 1)$ , it satisfies

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L(t)} = 1 \text{ a.s.}; \quad (2.4.6)$$

ii) if  $\alpha \in (1, \infty)$ , it satisfies

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha}(t)} = 1 \quad a.s.; \quad (2.4.7)$$

iii) if  $\alpha = 1$ , it satisfies

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L(t)} = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho}} \quad a.s. \quad (2.4.8)$$

In the repulsive case similar ideas will apply. However, we need to distinguish two particular cases, when  $\alpha = -1$  (Bessel case) or when  $\alpha = 1$  (the continuous time analogue of the Friedman's urn model in [2] and [1]). We note that in these cases the recurrent or transient features depend on the position of  $\rho$  with respect to  $1/2$ .

**Theorem 2.4.2** (Repulsive case). *Assume that  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}_+$  and  $2\beta = \alpha + 1$ .*

i) *If  $\alpha \in (-1, 1)$ ,  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$  and it satisfies (2.4.5) and (2.4.6).*

ii) *If  $\alpha \in (-\infty, -1)$ ,  $X$  is transient, it satisfies (2.4.5), (2.4.6) and*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha}(t)} = 1 \quad a.s.. \quad (2.4.9)$$

iii) *If  $\alpha \in (1, \infty)$ , the explosion time  $\tau_e$  of  $X$  is finite a.s. and*

$$|X_t| \underset{t \rightarrow \tau_e}{\sim} \frac{\tau_e^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}}}{(\rho(\alpha-1)(\tau_e-t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad a.s. \quad (2.4.10)$$

iv) *If  $\alpha = -1$ ,  $X$  is the classical Bessel process of dimension  $2\rho + 1$ . It satisfies (2.4.5) and (2.4.6) and, it is recurrent in  $[0, \infty)$ , when  $\rho \in (0, 1/2)$ , recurrent in  $(0, \infty)$ , when  $\rho = 1/2$  and transient, when  $\rho \in (1/2, \infty)$ . Moreover,*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\right)}{\ln \ln t} = -\frac{1}{2\rho-1} \quad a.s. \quad \text{when } \rho \in (1/2, \infty). \quad (2.4.11)$$

v) *If  $\alpha = 1$ ,  $X$  is a Gaussian process, recurrent in  $\mathbb{R}$ , when  $\rho \in (0, 1/2]$ , and transient, when  $\rho \in (1/2, \infty)$ . Moreover,*

a) *if  $\rho \in (0, 1/2)$ , it satisfies*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\rho-1}\right) \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L(t)} = \sqrt{\frac{2}{1-2\rho}} \quad a.s.;$$

b) *if  $\rho = 1/2$ , it satisfies*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t \ln t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{2t \ln t \ln \ln t}} = 1 \quad a.s.;$$

c) if  $\rho \in (1/2, \infty)$ , it satisfies

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t^\rho} = G_{\rho, x_0} \quad a.s., \quad \text{with } G_{\rho, x_0} \sim \mathcal{N}\left(x_0, \frac{1}{2\rho - 1}\right).$$

**Remark 2.4.3.** *The results contained in the latter theorem are in keeping with some results obtained for discrete time models in [2] and [1]. More precisely, for the case  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  (point v) of Theorem 2.4.2) one finds similar results as Theorems 3.1, 4.1 and 5.1 in [2] and Corollary 1 in [1] concerning Friedman's urn model. For the case  $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$  (point iv) of Theorem 2.4.2) one gets similar result as in Theorem 5 in [1]. We also point out that the part i) of Theorem 2.4.2 gives the asymptotic behaviour on a the domain where the question is stated as an open problem in [1], p. 958.*

**Proof of Theorem 2.4.1.** Let  $Z = \Phi_e(X) \equiv \Phi_\gamma(X)$  be the solution of the time-homogeneous equation (2.2.15). The scale function and the speed measure of  $Z$  (see Chap. VI in [86], pp. 446-449) are respectively given by

$$s(x) := \int_0^x e^{V_{\rho, \alpha}(y)} e^{\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{and} \quad m(dx) := e^{-V_{\rho, \alpha}(x)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Remark that  $m$  is a finite measure on  $\mathbb{R}$  and  $m(dx)/m(\mathbb{R}) = \Lambda_{\rho, \alpha}(dx)$ . By using the ergodic theorem (see, for instance, Theorem 23.15 in [7], p. 465), we obtain

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} Z_{\ln t} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Lambda_{\rho, \alpha}.$$

To complete the proof we shall apply Motoo's theorem (see [8]). We recall this result since it will be used several times.

**Theorem 2.4.4 (Motoo).** *Let  $X$  be a regular continuous strong Markov process in  $(a, \infty)$ ,  $a \in [-\infty, \infty)$ , which is homogeneous in time, with scale function  $s$  and finite speed measure  $m$ . For every real positive increasing function  $h$ ,*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{h(t)} \geq 1\right) = 0 \quad \text{or} \quad 1 \quad \text{according to whether} \quad \int^\infty \frac{dt}{s(h(t))} < \infty \quad \text{or} \quad = \infty.$$

Recall that  $V_{\rho, \alpha}$  is given by (2.4.2). By using L'Hôpital's rule, we can see that

$$s(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} x^{-1} e^{-V_{\rho, \alpha}(x)} e^{-x^2/2}, & \text{if } \alpha \in (-1, 1), \\ (2|\rho|x^\alpha)^{-1} e^{-V_{\rho, \alpha}(x)} e^{-x^2/2}, & \text{if } \alpha \in (1, \infty). \end{cases}$$

If  $\alpha \in (-1, 1)$ , by a simple application of the Motoo's theorem we see that, for all  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{\sqrt{2 \ln t}} \geq 1 + \varepsilon\right) = 0 \quad \text{and} \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_t}{\sqrt{2 \ln t}} \geq 1 - \varepsilon\right) = 1.$$



We deduce

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L(t)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_{\ln t}}{\sqrt{2 \ln t}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

If  $\alpha \in (1, \infty)$ , we deduce, again by Motoo's theorem,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha}(t)} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_{\ln t}}{(c_{\rho, \alpha} \ln \ln t)^{\frac{1}{\alpha+1}}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

Finally, assume that  $\alpha = 1$  (the linear case). Equality (2.4.8) can be proved by using similar methods as previously or by using standard results on linear stochastic differential equations.

Furthermore, by symmetry of equation (2.2.1), we can replace  $X$  by  $-X$  in relations (2.4.6)-(2.4.8) to deduce that  $\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = \infty$  and  $\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty$  a.s. and conclude that  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Proof of Theorem 2.4.2.** To begin with, we point out that the proof of the point *i*), when  $\alpha \in (-1, 1)$ , is the same as in the proof of Theorem 2.4.1.

When  $\alpha \in (-\infty, -1)$ , this last statement is also true when proving (2.4.5) and (2.4.6). We need to prove (2.4.9) and the transient feature. To this end, consider again  $Z = \Phi_e(X) \equiv \Phi_\gamma(X)$ . By Ito's formula, we can see that  $\tilde{Z}$  is the weak solution of

$$d\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t^2 dW_t + \left( \tilde{Z}_t^3 - \rho \tilde{Z}_t^{2-\alpha} + \frac{\tilde{Z}_t}{2} \right) dt, \quad \tilde{Z}_0 = \frac{1}{x_0}, \quad \text{with} \quad \tilde{Z} := \frac{1}{Z}.$$

Again, by applying Motoo's theorem to  $\tilde{Z}$ , we deduce that

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha}(t)} = \left( \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Z}_t}{(c_{\rho, \alpha} \ln t)^{\frac{1}{|\alpha+1|}}} \right)^{-1} = 1 \quad \text{a.s.}$$

Note that this relation insure the transient feature, since  $\lim_{t \rightarrow \infty} L_{\rho, \alpha}(t) = \infty$ , if  $\alpha < -1$ .

Assume that  $\alpha \in (1, \infty)$ . We have already showed that the explosion time  $\eta_e$  of  $Z$  is finite a.s. (see Proposition 2.3.6). Moreover, we can see that the process  $z_t := Z_t - W_t$  satisfies the random ordinary differential equation

$$\frac{dz_t}{dt} = \rho \operatorname{sgn}(z_t + W_t) |z_t + W_t|^\alpha - \frac{z_t + W_t}{2}.$$

We deduce that

$$\frac{|z_t|^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \int_t^{\eta_e} \frac{dz_s}{\operatorname{sgn}(z_s) |z_s|^\alpha} \underset{t \rightarrow \eta_e}{\sim} \rho(\eta_e - t) \quad \text{and} \quad |Z_t| \underset{t \rightarrow \eta_e}{\sim} \frac{1}{(\rho(\alpha-1)(\eta_e - t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad \text{a.s.}$$

Remark also that the explosion time  $\tau_e$  of  $X$  satisfies  $\tau_e = e^{\eta_e}$  a.s. Therefore

$$|X_t| = \sqrt{t} |Z_{\ln t}| \underset{t \rightarrow \tau_e}{\sim} \frac{\sqrt{\tau_e}}{(\rho(\alpha-1)(\ln \tau_e - \ln t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \underset{t \rightarrow \tau_e}{\sim} \frac{\tau_e^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}}}{(\rho(\alpha-1)(\tau_e - t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad \text{a.s.}$$

Assume that  $\alpha = -1$  and let  $R^{(e)}$  be the pathwise unique strong solution of equation (2.2.10). By applying Lemma 2.2 in [85], p. 916 and the ergodic theorem to  $R^{(e)}$ , we obtain (2.4.5) and (2.4.6) by change of time. Equality (2.4.11) is a consequence of Lemma 4.1 in [85], p. 926. The recurrent or the transient features are proved in Chap. IX in [4].

Finally, if  $\alpha = 1$  we are studying the classical case of a linear stochastic differential equation. By standard arguments (see, for instance, [4] Proposition 2.3, Chap. IX, p. 378, and Theorem 1.7, Chap. V, p. 182) there exists a Brownian motion  $W$  such that

$$\frac{X_t}{t^\rho} = x_0 + \int_1^t \frac{dB_s}{s^\rho} = x_0 + W_{\phi(t)}, \quad \text{with} \quad \phi(t) := \begin{cases} \frac{t^{1-2\rho}-1}{1-2\rho} & \text{if } \rho \neq 1/2 \\ \ln t & \text{if } \rho = 1/2. \end{cases}$$

By using the well known properties of the Brownian motion, we deduce the convergence in distribution and the pathwise largest deviations of the Gaussian process  $X$ . Furthermore, the recurrent or transient features are simple consequences.  $\square$

## 2.4.2 Behaviour above the critical line: $2\beta > \alpha + 1$

The scaling transformation (2.2.2) associated with the exponential change of time does not provides a time-homogeneous equation.

However, we shall prove that the asymptotic behaviour of equation (2.2.6) is related to the asymptotic behaviour of the Ornstein-Uhlenbeck process (2.2.7), with the help of the Motoo theorem, the ergodic theorem, the comparison theorem (see, for instance, Theorem 1.1, Chap. VI in [86], p. 437) and of the following result, whose proof is postponed to the Appendix.

**Lemma 2.4.5.** *Let  $Z$  and  $H$  be regular strong Markov processes which are, respectively, weak solutions of the stochastic differential equations with continuous coefficients:*

$$dZ_s = \sigma(s, Z_s) dB_t + d(s, Z_s) ds \quad \text{and} \quad dH_s = \sigma_\infty(H_s) dB_s + d_\infty(H_s) ds.$$

*Assume  $(Z, H)$  is asymptotically time-homogeneous and  $\Pi$ -ergodic, in the sense that*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s, z) = \sigma_\infty(z) \quad \text{and} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} d(s, z) = d_\infty(z), \quad \text{uniformly on compact subsets of } \mathbb{R},$$

*and  $H$  converges in distribution to  $\Pi$ . Furthermore, assume that  $Z$  is bounded in probability, that is, for all  $\varepsilon > 0$  there exists  $r > 0$  such that  $\sup_{s \geq 0} \mathbb{P}(|Z_s| \geq r) < \varepsilon$ . Then  $Z$  converges also in distribution to  $\Pi$ .*

**Theorem 2.4.6** (Attractive case). *If  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}_-$  and  $2\beta \in (\alpha + 1, \infty)$ ,  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$  and*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L(t)} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (2.4.12)$$

One more time, for the repulsive case we will follow similar ideas as for the attractive case, by modifying some computations when technical difficulties appear.

Besides, when  $\alpha \in (1, \infty)$  the process explodes with positive probability (see Proposition 2.3.7). Hence we need to adapt Lemma 2.4.5 to show that, under the conditional probability of nonexplosion, the solution of equation (2.2.6) behaves as the Ornstein-Uhlenbeck process (2.2.7).

**Theorem 2.4.7** (Repulsive case). *Assume that  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}_+$  and  $2\beta \in (\alpha + 1, \infty)$ .*

- i) If  $\alpha \in (-1, 1]$ ,  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$  and it satisfies (2.4.12).*
- ii) If  $\alpha \in (-\infty, -1]$ ,  $X$  is recurrent in  $[0, \infty)$ , when  $\alpha = -1$ , in  $(0, \infty)$ , when  $\alpha \in (-\infty, -1)$  and  $\beta \in [0, \infty)$  and it is transient, when  $\alpha \in (-\infty, -1)$  and  $\beta \in (-\infty, 0)$ . Moreover,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} |G| \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L(t)} = 1 \quad \text{a.s.,} \quad \text{with } G \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.4.13)$$

and

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha, \beta}(t)} \geq 1 \quad \text{a.s.} \quad \text{when } \alpha \in (-\infty, -1). \quad (2.4.14)$$

- iii) If  $\alpha \in (1, \infty)$ , conditionally to  $\{\tau_e = \infty\}$ ,  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$  and it satisfies (2.4.12), and conditionally to  $\{\tau_e < \infty\}$ , it satisfies (2.4.10).*

**Remark 2.4.8.** *The preceding statement concerning the recurrent asymptotic behaviour is a similar result as Theorem 4.2 ii) in [1], p. 955.*

**Proof of Theorem 2.4.6.** The equalities in the statement will be consequences of Lemma 2.4.5 and Motoo's theorem. Let us consider  $X^{(e)} = \Phi_e(X)$  the unique weak solution of (2.2.6) and  $U$  the Ornstein-Uhlenbeck process solution of (2.2.7). Equalities in (2.4.12) are equivalent to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^{(e)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} G \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t^{(e)}}{\sqrt{2 \ln t}} = 1 \quad \text{a.s.,} \quad \text{with } G \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.4.15)$$

Equalities (2.4.15) are satisfied by  $U$  and roughly speaking  $X^{(e)}$  behaves as the Ornstein-Uhlenbeck process  $U$ . The proof of (2.4.15) is split in three steps.

**Step a).** Lemma 2.4.5 does not apply to  $(X^{(\epsilon)}, U)$  since the coefficients of equation (2.2.6) are discontinuous when  $\alpha < 0$ . To remove the singularity, we consider  $C := (X^{(\epsilon)})^3$  and  $Q := U^3$ . Ito's formula allows to see that  $C$  and  $Q$  are solutions of

$$dC_t = 3C_t^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left(C_t^{\frac{1}{3}} - \frac{C_t}{2} + \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)t} \operatorname{sgn}(C_t) |C_t|^{\frac{\alpha+2}{3}}\right) dt, \quad C_0 = x_0^3, \quad (2.4.16)$$

and, respectively,

$$dQ_t = 3Q_t^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left(Q_t^{\frac{1}{3}} - \frac{Q_t}{2}\right) dt, \quad Q_0 = x_0^3. \quad (2.4.17)$$

Since  $2\beta > \alpha + 1$ , we deduce that  $(C, Q)$  is asymptotically time-homogeneous and  $\mathcal{L}(G^3)$ -ergodic.

**Step b).** In order to apply Lemma 2.4.5 to  $(C, Q)$  we need to show that  $C$  is bounded in probability. We prove this result by comparison with time-homogeneous ergodic diffusions. To this end, consider the pathwise unique strong solution  $C$  of equation (2.4.16) and denote by  $C^\pm$  the pathwise unique strong solutions of equations

$$dC_t^\pm = 3(C_t^\pm)^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left((C_t^\pm)^{\frac{1}{3}} - \frac{C_t^\pm}{2} \mp \rho |C_t^\pm|^{\frac{\alpha+2}{3}} \mathbf{1}_{\{\mp C_t^\pm \geq 0\}}\right) dt, \quad C_0^\pm = x_0^3.$$

By using a comparison theorem (see Theorem 1.1, Chap. VI in [86], p. 437) we get, for all  $t \geq 0$ ,  $C_t^- \leq C_t \leq C_t^+$ , a.s. Moreover, by computation of the speed measure as in the proof of Theorem 2.4.1, we can see that  $C^\pm$  are ergodic diffusions and therefore they are bounded in probability. By comparison, it is the same for  $C$ , and this fact implies the first equality in (2.4.15).

**Step c).** We get the pathwise largest deviations of  $C$  by comparison with the time-homogeneous ergodic diffusion. By applying Motoo's theorem to  $C^+$  (as in Theorem 2.4.1), we obtain

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t}{(2 \ln t)^{\frac{3}{2}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t^+}{(2 \ln t)^{\frac{3}{2}}} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (2.4.18)$$

To deduce the second equality in (2.4.15), we need to prove the opposite inequality in (2.4.18). We can see that the equality (2.4.18) holds for  $-C_t$ , by symmetry of (2.4.16), and it implies that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)t} \operatorname{sgn}(C_t) |C_t|^{\frac{\alpha+2}{3}} = 0 \quad \text{a.s.} \quad (2.4.19)$$

Let  $u \geq 0$  be and let us introduce the pathwise unique strong solution of equation

$$dC_t(u) = 3C_t(u)^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left(C_t(u)^{\frac{1}{3}} - \frac{C_t(u)}{2} - 1\right) dt, \quad C_u(u) = C_u.$$

We shall prove that for all  $t \geq u$ ,

$$C_t(u) \leq C_t \quad \text{a.s. on} \quad \Omega_u := \left\{ \sup_{t \geq u} \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)t} |C_t|^{\frac{\alpha+2}{3}} \leq 1 \right\}. \quad (2.4.20)$$

Indeed, we introduce the stopping time  $\tau_u$  defined by

$$\tau_u := \inf \left\{ t \geq u : \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)t} |C_t|^{\frac{\alpha+1}{3}} > 1 \right\}.$$

Using again the comparison theorem in [86], p.437, and a classical argument of localisation, we obtain  $C_{\bullet \wedge \tau_u}(u) \leq C_{\bullet \wedge \tau_u}$  a.s. Since  $\{\tau_u = \infty\} = \Omega_u$  we deduce (2.4.20). By applying Motoo's theorem to  $C(u)$  and by using (2.4.19), we get

$$1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t(u)}{(2 \ln t)^{\frac{3}{2}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t}{(2 \ln t)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{a.s. on } \Omega_u, \quad \text{and } \mathbb{P}(\cup_{u \geq 0} \Omega_u) = 1.$$

The opposite inequality in (2.4.18) is obtained and the proof of (2.4.15) is finished.

Finally, to conclude that  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$ , it suffices to replace  $X$  by  $-X$  in the second equality in (2.4.12). This is possible by symmetry of equation (2.2.1).  $\square$

**Proof of Theorem 2.4.7.** Let us note that, for  $\alpha \in (-1, 1]$ , the proof is exactly the same as the proof of Theorem 2.4.6, while the proof for  $\alpha \in (-\infty, -1]$  follows some similar steps.

Let us only bring out the differences for  $\alpha \in (-\infty, -1]$ . We consider again the couple  $(X^{(e)}, U)$  and we perform the Step a) in the proof of Theorem 2.4.6 with  $((X^{(e)})^3, U^3)$  replaced by  $(|X^{(e)}|^{\alpha+1}, |U|^{\alpha+1}) =: (C, Q)$  (to avoid the singularity). It follows that  $(C, Q)$  is asymptotically time-homogeneous and  $\mathcal{L}(|G|^{\alpha+1})$ -ergodic. Here  $Q$  and  $C$  are weak solutions of

$$dQ_t = (|\alpha| + 1) Q_t^{\frac{|\alpha|}{|\alpha+1}} dW_t + \frac{|\alpha| + 1}{2} \left( |\alpha| Q_t^{\frac{|\alpha|-1}{|\alpha+1}} - Q_t \right) dt, \quad Q_0 = x_0^{|\alpha+1},$$

and

$$dC_t = (|\alpha| + 1) C_t^{\frac{|\alpha|}{|\alpha+1}} dW_t + \frac{|\alpha| + 1}{2} \left[ |\alpha| C_t^{\frac{|\alpha|-1}{|\alpha+1}} - C_t + 2\rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)t} C_t^{\frac{|\alpha+\alpha}{|\alpha+1}} \right] dt, \quad C_0 = x_0^{|\alpha+1}.$$

As in Step b) in the proof of Theorem 2.4.6 we can show that  $C_t$  is bounded in probability, by comparing  $C_t$  with the ergodic nonnegative diffusion satisfying

$$dC_t^+ = (|\alpha| + 1) (C_t^+)^{\frac{|\alpha|}{|\alpha+1}} dW_t + \frac{|\alpha| + 1}{2} \left( |\alpha| (C_t^+)^{\frac{|\alpha|-1}{|\alpha+1}} - C_t^+ + 2\rho (C_t^+)^{\frac{|\alpha+\alpha}{|\alpha+1}} \right) dt, \quad C_0^+ = x_0^{|\alpha+1}.$$

Lemma 2.4.5 applies and we get the first equality in (2.4.13). Finally, as in Step c) of the cited proof, by applying Motoo's theorem to  $Q_t$  and  $C_t^+$  and by comparison theorem we can obtain

$$1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{Q_t}{(2 \ln t)^{\frac{|\alpha+1}{2}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t}{(2 \ln t)^{\frac{|\alpha+1}{2}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t^+}{(2 \ln t)^{\frac{|\alpha+1}{2}}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

We deduce the second equality in (2.4.13).

If  $\alpha < -1$ , let  $\tilde{X}^{(\gamma)} := 1/X^{(\gamma)}$  be the pathwise unique nonnegative strong solution of

$$d\tilde{X}_t^{(\gamma)} = (\tilde{X}_t^{(\gamma)})^2 dW_t + \left( (\tilde{X}_t^{(\gamma)})^3 - \rho (\tilde{X}_t^{(\gamma)})^{2-\alpha} + \frac{\gamma \tilde{X}_t^{(\gamma)}}{2(1 - (1 - \gamma)t)} \right) dt, \quad \tilde{X}_0^{(\gamma)} := \frac{1}{x_0}.$$

Recall that  $X^{(\gamma)}$  is the pathwise unique nonnegative strong solution of (2.2.12). Consider also the pathwise unique nonnegative strong solution  $\tilde{Y}$  of

$$d\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_t^2 dW_t + \left( \tilde{Y}_t^3 - \rho \tilde{Y}_t^{2-\alpha} + \frac{|\gamma| \tilde{Y}_t}{2} \right) dt, \quad \tilde{Y}_0 := \frac{1}{x_0}.$$

By comparison between  $\tilde{X}^{(\gamma)}$  and  $\tilde{Y}$ , and by applying Motoo's theorem to  $\tilde{Y}$ , we deduce

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha, \beta}(t)} = \left( \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{X_s^{(\gamma)}}{(c_{\rho, \alpha} \ln s)^{\frac{1}{|\alpha+1|}}} \right)^{-1} \geq \left( \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{\tilde{Y}_s}{(c_{\rho, \alpha} \ln s)^{\frac{1}{|\alpha+1|}}} \right)^{-1} = 1 \quad \text{a.s.}$$

In previous relation the first equality was obtained by using the change of time  $s = \varphi_\gamma^{-1}(t)$  defined in (2.2.11). Moreover, if  $\alpha = -1$ , the point 0 is recurrent for  $X$ . By (2.4.13), we get the recurrent feature in  $[0, \infty)$ . Besides, we obtain from (2.4.14) that  $X$  is transient, when  $\beta \in (-\infty, 0)$ . Furthermore, if  $\beta = 0$ ,  $X$  is an homogeneous diffusion and by standard criteria, using the scale function, we can see that  $X$  is recurrent in  $(0, \infty)$ . If  $\beta \in [0, \infty)$ , by comparison theorem with the process obtained for  $\beta = 0$ , we get that  $X$  is recurrent in  $(0, \infty)$ . The proof of ii) is complete.

If  $\alpha \in (1, \infty)$ , consider  $X^{(\gamma)} = \Phi_\gamma(X)$  and  $b$  the respective solutions of equations (2.2.14) and (2.2.17). Denote by  $\eta_e$  the explosion time of  $X^{(\gamma)}$  and recall that  $\{\eta_e \geq t_1\} = \{\tau_e = \infty\}$ ,  $\mathbb{P}(\eta_e = t_1) = 0$  (Lemma 2.3.8) and  $\lim_{t \rightarrow t_1} b_t = 0$  a.s. By using (2.3.5),

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow t_1} X_t^{(\gamma)} = 0, \eta_e \geq t_1\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\lim_{t \rightarrow t_1} b_t = 0\right\}} \mathcal{E}(t_1)\right) = \mathbb{E}(\mathcal{E}(t_1)) = \mathbb{P}(\eta_e \geq t_1).$$

By change of time, we get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} = \lim_{t \rightarrow t_1} X_t^{(\gamma)} = 0 \quad \text{a.s. on } \{\tau_e = \infty\}. \quad (2.4.21)$$

Therefore

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_1^t \rho \frac{|X_s|^\alpha}{s^\beta} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_1^t \rho \left| \frac{X_s}{s^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} \right|^\alpha s^{-\frac{\beta}{\alpha+1}} ds = 0 \quad \text{a.s. on } \{\tau_e = \infty\}.$$

We deduce that  $X$  satisfies the iterated logarithm law in (2.4.12) under the conditional probability of nonexplosion. Hence it is recurrent in  $\mathbb{R}$ . We shall prove the convergence in distribution (2.4.12) under the conditional probability of nonexplosion. For this end, it suffices to show that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_s^{(e)} > x \mid \sigma_e = \infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (2.4.22)$$

Here  $\sigma_e$  denotes the explosion time of  $X^{(e)} = \Phi_e(X)$ , the solution of (2.2.6). Note that Lemma 2.4.5 does not apply directly to  $(X^{(e)}, U)$ , since  $\sigma_e$  could be finite with positive probability. By using (2.4.21), we remark that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)s} |X_s^{(e)}|^\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho t^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{\alpha+1}\right)} \left| \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} \right|^\alpha = 0 \quad \text{a.s. on } \{\sigma_e = \infty\}. \quad (2.4.23)$$

Let  $\varepsilon > 0, v \geq 0$  be and denote  $U^{(\pm\varepsilon)}$  the pathwise unique strong solutions of equations

$$dU_s^{(\pm\varepsilon)} = dW_s - \frac{U_s^{(\pm\varepsilon)}}{2} ds \pm \varepsilon ds, \quad U_v^{(\pm\varepsilon)} = X_v^{(e)} \mathbf{1}_{\{\sigma_e > v\}}.$$

It is classical that  $U^{(\pm\varepsilon)}$  is Feller and ergodic. Furthermore, the strong mixing property holds (see [7], Theorem 20.20, p. 408), hence we obtain

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P}(U_s^{(\pm\varepsilon)} > x \mid \Omega_v^\varepsilon) = F_{\mp\varepsilon}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{(y \mp \varepsilon)^2}{2}\right) dy, \quad (2.4.24)$$

with

$$\Omega_v^\varepsilon := \left\{ \sup_{s \geq v} \rho e^{(\frac{\alpha+1}{2}-\beta)s} |X_s^{(e)}|^\alpha \leq \varepsilon \right\}.$$

Similarly as for (2.4.20), we can show, by using comparison theorem and a classical argument of localisation, that, for all  $s \geq v$ ,  $U_s^{(-\varepsilon)} \leq X_s^{(e)} \leq U_s^{(+\varepsilon)}$  a.s. on  $\Omega_v^\varepsilon$ . We deduce, from (2.4.24),

$$F_{+\varepsilon}(x) \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_s^{(e)} > x \mid \Omega_v^\varepsilon) \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_s^{(e)} > x \mid \Omega_v^\varepsilon) \leq F_{-\varepsilon}(x). \quad (2.4.25)$$

Thanks to (2.4.23) the set of nonexplosion is  $\{\sigma_e = \infty\} = \cup_{v \geq 0} \Omega_v^\varepsilon$ . Letting  $v \rightarrow \infty$ , and then  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (2.4.25), we deduce (2.4.22).

To finish the proof, we need to study the process  $X$  conditionally to  $\{\tau_e < \infty\}$  and prove that it satisfies (2.4.10). The method is the same as in the proof of Theorem 2.4.2: we show that

$$|X_t^{(e)}| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\rho(\alpha-1)(\eta_e-t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad \text{a.s. on } \{\eta_e < \infty\},$$

and we conclude by change of time. □

### 2.4.3 Behaviour under the critical line: $2\beta < \alpha + 1$

In the attractive case, by using similar techniques as in the proofs of theorems 2.4.6 and 2.4.7 we shall prove that the asymptotic behaviour of equation (2.2.13) is related to the asymptotic behaviour of the time-homogeneous equation (2.2.16). By change of time, we shall obtain the asymptotic behaviour for (2.2.1).

**Theorem 2.4.9** (Attractive case). *If  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}_-$  and  $2\beta \in (-\infty, \alpha + 1)$ ,  $X$  is recurrent in  $\mathbb{R}$ , if  $\beta \in [0, \infty)$ , and  $X$  converges a.s. towards 0, if  $\beta \in (-\infty, 0)$ . Moreover,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t^{\frac{\beta}{\alpha+1}}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Pi_{\rho, \alpha} \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{L_{\rho, \alpha, \beta}(t)} = 1 \quad \text{a.s.} \quad (2.4.26)$$

**Theorem 2.4.10** (Repulsive case). *If  $(\rho, \alpha, \beta) \in \mathcal{P}_+$  and  $2\beta \in (-\infty, \alpha + 1)$ ,  $X$  is transient. Moreover,*

i) *if  $\alpha \in (-\infty, 1)$ , it satisfies*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t|}{t^{\frac{1-\beta}{1-\alpha}}} = \left( \frac{\rho(1-\alpha)}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad a.s.; \quad (2.4.27)$$

ii) *if  $\alpha \in (1, \infty)$ , it satisfies*

$$|X_t| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\tau_e^{\frac{\beta}{\alpha-1}}}{(\rho(\alpha-1)(\tau_e - t))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad a.s. \quad (2.4.28)$$

iii) *if  $\alpha = 1$ , it satisfies*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\exp\left(\frac{\rho t^{1-\beta}}{1-\beta}\right)} = G \quad a.s., \quad (2.4.29)$$

where  $G \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , with  $m := x_0 \exp\left(\frac{\rho}{\beta-1}\right)$  and  $\sigma^2 := \int_1^\infty \exp\left(\frac{2\rho s^{1-\beta}}{\beta-1}\right) ds$ .

**Remark 2.4.11.** *Again, one finds a similar result as in Theorem 1 ii) from [1], p. 951, concerning the transient feature of the process.*

**Proof of Theorem 2.4.9.** Let  $X^{(\gamma)} = \Phi_\gamma(X)$  and  $H$  be the solutions respectively of (2.2.13) and (2.2.16). Equalities in (2.4.26) are equivalent to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^{(\gamma)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} S \quad \text{and} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t^{(\gamma)}}{(c_{\rho, \alpha} \ln t)^{\frac{1}{\alpha+1}}} = 1 \quad a.s., \quad \text{with} \quad S \sim \Pi_{\rho, \alpha}. \quad (2.4.30)$$

Note that  $H$  satisfies these equalities. To prove (2.4.30) we can follow similar Steps a)-c) as in the proof of Theorem 2.4.6, by considering  $C := (X^{(\gamma)})^3$  and  $Q := H^3$ , which are the pathwise unique strong solutions of

$$dQ_t = 3Q_t^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left(\rho \operatorname{sgn}(Q_t)|Q_t|^{\frac{\alpha+2}{3}} + Q_t^{\frac{1}{3}}\right) dt, \quad Q_0 = x_0^3,$$

and

$$dC_t = 3C_t^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left(\rho \operatorname{sgn}(C_t)|C_t|^{\frac{\alpha+2}{3}} + C_t^{\frac{1}{3}} - \frac{\gamma C_t}{2(1-(1-\gamma)t)}\right) dt, \quad C_0 = x_0^3.$$

As in Step a) we get that  $(C, Q)$  is asymptotically homogeneous and  $\mathcal{L}(S^3)$ -ergodic. The arguments of the corresponding Step b) are going on as follows. Since  $\rho$  is negative, it is not



difficult to prove that  $X_t^2 \leq \tilde{W}_t^2$ ,  $t \geq 0$ , where  $\tilde{W}_t$  is a Brownian motion. We obtain by using the change of time  $s = \varphi_\gamma^{-1}(t)$  and the iterated logarithm law that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t}{(2t \ln \ln t)^{\frac{3}{2}}} = \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{X_s^3}{\left(\frac{2}{1-\gamma} s \ln \ln s\right)^{\frac{3}{2}}} \leq (1-\gamma)^3 \quad \text{a.s.} \quad (2.4.31)$$

Let  $\theta \in (1/3, (\alpha+2)/3)$  be. Thanks to (2.4.31), we deduce

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|C_t|^\theta} \cdot \frac{\gamma C_t}{1 + (1-\gamma)t} = 0 \quad \text{a.s.} \quad (2.4.32)$$

Let  $\nu \geq 0$  be and introduce  $C^\pm$  the pathwise unique strong solution of

$$dC_t^\pm = 3(C_t^\pm)^{\frac{2}{3}} dW_t + 3\left(\rho \operatorname{sgn}(C_t^\pm) |C_t^\pm|^{\frac{\alpha+2}{3}} + (C_t^\pm)^{\frac{1}{3}} \pm |C_t^\pm|^\theta\right) dt, \quad C_\nu^\pm = C_\nu.$$

As for the proof of comparison (2.4.20) we can prove that for all  $s \geq \nu$ ,

$$C_t^- \leq C_t \leq C_t^+ \quad \text{a.s. on} \quad \Omega_\nu := \left\{ \sup_{t \geq \nu} \frac{1}{|C_t|^\theta} \cdot \frac{\gamma C_t}{1 + (1-\gamma)t} \leq 1 \right\}. \quad (2.4.33)$$

By (2.4.32), for any  $\varepsilon > 0$ , we can choose  $\nu \geq 0$  such that  $\mathbb{P}(\Omega_\nu) \geq 1 - \varepsilon$ . Moreover, there exists  $r \geq 0$  such that for all  $t \geq \nu$ ,  $\mathbb{P}(|C_t^\pm| \geq r) \leq \varepsilon$  since  $C^\pm$  is an ergodic diffusion (by computation of the speed measure). Combining the latter inequality with (2.4.33) which holds on  $\Omega_\nu$ , we obtain that  $\mathbb{P}(|C_t| \geq r) \leq 2\varepsilon$ , for all  $t \geq \nu$  and therefore we conclude that  $C$  is bounded in probability. Finally, Step c) is a consequence of Motoo's theorem applied to  $C^\pm$  and to the preceding comparison,

$$1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t^-}{(c_{\rho, \alpha} \ln t)^{\frac{3}{\alpha+1}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t}{(c_{\rho, \alpha} \ln t)^{\frac{3}{\alpha+1}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{C_t^+}{(c_{\rho, \alpha} \ln t)^{\frac{3}{\alpha+1}}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

This ends the proof of (2.4.30). To get the recurrence feature or the convergence toward 0 we use the second equality in (2.4.26) with  $X$  and  $-X$ .  $\square$

**Proof of Theorem 2.4.10.** Assume that  $\alpha \in (-\infty, 1)$ . To simplify the computations, let us denote the limit and the exponent of  $t$  in (2.4.27), respectively by

$$\ell := \left( \frac{\rho(1-\alpha)}{1-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{and} \quad \nu := \frac{1-\beta}{1-\alpha}.$$

If we set  $S_t := X_t^2/t^{2\nu}$ , it suffices to verify that  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = \ell^2$  a.s., that is, for all  $\varepsilon > 0$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S_t \leq \ell^2 + 3\varepsilon \quad \text{and} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} S_t \geq \ell^2 - 3\varepsilon \quad \text{a.s.} \quad (2.4.34)$$

We shall prove only the first inequality in (2.4.34), the second one being obtained in a similar way. We split the proof of this inequality in four steps.

**Step a).** We begin by proving that, for all  $\varepsilon > 0$ ,

$$\{t \geq 1 : S_t \leq \ell^2 + \varepsilon\} \text{ is unbounded a.s.} \quad (2.4.35)$$

For this end, set  $\eta_u := \inf\{v \geq u : S_v \leq \ell^2 + \varepsilon\}$ ,  $u \geq 1$ . Then, it suffices to prove that for all  $u \geq 1$  large enough,  $\eta_u < \infty$  a.s. By using Ito's formula, we can see that

$$S_{t \wedge \eta_u} = S_u + \int_u^{t \wedge \eta_u} LG(s, X_s) ds + \int_u^{t \wedge \eta_u} \partial_x G(s, X_s) dB_s := S_u + M_t + A_t, \quad (2.4.36)$$

where  $G(t, x) := x^2/t^{2\nu}$  and where  $L$  is given by (2.3.3). Moreover, we can see that there exist  $s_0 \geq 1$  and  $c > 0$  such that, for all  $s \geq s_0$  and  $x \in \mathbb{R}$ , for which  $G(s, x) \geq \ell^2 + \varepsilon$  and

$$LG(s, x) = \frac{2\rho}{s} \left( G(s, x)^{\frac{\alpha-1}{2}} - \ell^{\alpha-1} \right) G(s, x) + \frac{1}{s^{2\nu}} \leq -\frac{c}{s} \leq 0. \quad (2.4.37)$$

This implies that the local martingale part  $S_u + M$  of the non-negative semimartingale in (2.4.36), together with  $S_{\bullet \wedge \eta_u}$  itself, are nonnegative supermartingales for all  $u \geq s_0$ .

Therefore, the bounded variation part  $A$  will be a convergent process as the difference of two convergent supermartingales. Thanks to (2.4.37), this is possible if and only if  $\eta_u < \infty$  a.s.

**Step b).** We introduce an increasing sequence of stopping times as follows:

$$\tau_1 := \inf\{t \geq s_0 : S_t = \ell^2 + 2\varepsilon\}, \quad \sigma_1 := \inf\{t \geq \tau_1 : S_t \in \{\ell^2 + \varepsilon, \ell^2 + 3\varepsilon\}\}$$

and for every integer  $n \geq 2$ ,

$$\tau_n := \inf\{t \geq \sigma_{n-1} : S_t = \ell^2 + 2\varepsilon\}, \quad \sigma_n := \inf\{t \geq \tau_n : S_t \in \{\ell^2 + \varepsilon, \ell^2 + 3\varepsilon\}\}.$$

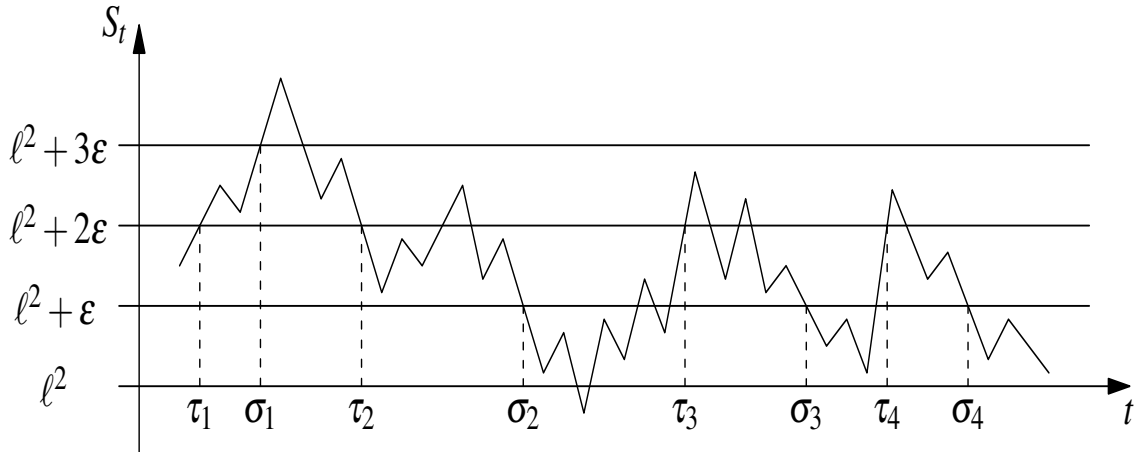


Figure 2.3: The increasing sequence of stopping times

Set  $F := \bigcap_{n \geq 1} \{\tau_n < \infty\}$ . Thanks to (2.4.35), we obtain that  $\limsup_{t \rightarrow \infty} S_t \leq \ell^2 + 2\varepsilon$  a.s. on  $F^c$ . To prove the first inequality in (2.4.34), we need to show that

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S_t \leq \ell^2 + 3\varepsilon \quad \text{a.s. on } F, \quad \text{or, equivalently,} \quad \mathbb{1}_F \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{\sigma_n} = \ell^2 + 3\varepsilon\}} < \infty \quad \text{a.s.}$$

By using a conditional version of the Borel-Cantelli lemma (see, for instance, Corollary 7.20 in [7], p. 131), it is equivalent to prove that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{\sigma_n} = \ell^2 + 3\varepsilon, \tau_n < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) < \infty \quad \text{a.s.} \quad (2.4.38)$$

**Step c).** We show that there exist positive constants  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  such that for all  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(S_{\sigma_n} = \ell^2 + 3\varepsilon, \tau_n < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) \leq \lambda_1 \tau_n^{(\frac{1}{2}-\nu)} \exp(-\lambda_2 \tau_n^{2\nu-1}) \quad \text{a.s. on } \{\tau_n < \infty\}. \quad (2.4.39)$$

To this end, let us denote by  $\mathbb{P}_{s,x}$  the distribution of the weak solution of (2.2.1) such that  $X_s = x$ . The strong Markov property applies and this yields

$$\mathbb{P}(S_{\sigma_n} = \ell^2 + 3\varepsilon, \tau_n < \infty \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) = \mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}(S_{\sigma_n} = \ell^2 + 3\varepsilon) \quad \text{a.s. on } \{\tau_n < \infty\}.$$

As in (2.4.36), we can write under the conditional probability  $\mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}$ , the canonical decomposition  $S_{t \wedge \sigma_n} = S_{\tau_n} + M_t^n + A_t^n$ , sum of a local martingale and a bounded variation process. Besides, we can show that  $\nu_n := \langle M^n \rangle_{\infty}$  satisfies

$$\nu_n = \int_{\tau_n}^{\sigma_n} \frac{4S_u}{u^{2\nu}} du \leq \int_{\tau_n}^{\infty} \frac{4(\ell^2 + 3\varepsilon)}{u^{2\nu}} du = \frac{4(\ell^2 + 3\varepsilon)}{(2\nu - 1)\tau_n^{2\nu-1}} \leq \frac{4(\ell^2 + 3\varepsilon)}{(2\nu - 1)s_0^{2\nu-1}} =: \nu_0.$$

Then, by the Dambis-Dubins-Schwarz theorem, there exists a standard Brownian motion  $W^n$  (under the conditional probability  $\mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}$ ) such that  $M^n = W^n_{\langle M^n \rangle}$  and since  $A^n$  is strictly negative, we can see that

$$\left\{ \sup_{0 \leq t \leq \nu_n} W_t^n < \varepsilon \right\} \subset \left\{ \sup_{t \geq \tau_n} M_t^n < \varepsilon \right\} \subset \{S_{\sigma_n} = \ell^2 + \varepsilon\}.$$

It is classical that  $\sup\{W_t^n : 0 \leq t \leq \nu_n\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} |G_n|$ , with  $G_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \nu_n)$ , under the conditional probability  $\mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}$  and therefore we obtain

$$\mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}(S_{\sigma_n} = \ell^2 + 3\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}(S_{\sigma_n} = \ell^2 + \varepsilon) \leq \mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}(|G_n| \geq \varepsilon/\sqrt{\nu_n}).$$

By the usual estimate of tails for the standard Gaussian random variables, we get (2.4.39).

**Step d).** To insure the convergence of the series in (2.4.38) we show that the sequence  $(\tau_n)$  increases to infinity sufficiently fast. More precisely, we show that there exists  $\lambda > 1$  such that  $\tau_n \geq \lambda^n \tau_1$  a.s. on  $F$ . This inequality will be a consequence of a sharper form of the Borel-Cantelli lemma (see, for example, Theorem 1 in [92], p. 800) once we show that there exist some constants  $q > 1$  and  $p > 0$  such that for all  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(\tau_{n+1} \geq q\tau_n \mid \mathcal{F}_{\tau_n}) \geq \mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}}(\sigma_n \geq q\tau_n) \geq p \quad \text{a.s. on } \{\tau_n < \infty\}. \quad (2.4.40)$$

In opposite to (2.4.37), we can see that there exists a constant  $k > 0$  such that for all  $t \geq 1$  and  $x \in \mathbb{R}$ , for which  $G(t, x) \leq \ell^2 + 3\varepsilon$ ,  $LG(t, x) \geq -k/t$ . We deduce that for all  $t \in [\tau_n, q\tau_n]$ ,

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq k \ln \left( \frac{\tau_n}{t} \right) \leq A_t^n \leq 0, \quad \text{with } q := e^{\frac{k\varepsilon}{2}} > 1.$$

By using this inequality, we can write

$$\{\sigma_n \geq q\tau_n\} \supset \left\{ \sup_{\tau_n \leq t \leq q\tau_n} |M_t^n| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \supset \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \nu_0} |W_t^n| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Therefore, inequality (2.4.40) is satisfied with the deterministic positive constant

$$p := \mathbb{P}_{\tau_n, X_{\tau_n}} \left( \sup_{0 \leq t \leq \nu_0} |W_t^n| < \frac{\varepsilon}{2} \right) = \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq \nu_0} |B_t| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Here  $B$  denotes a standard Brownian motion. The sharper form of the Borel-Cantelli lemma applies and we obtain that  $\tau_n \geq \lambda^n \tau_1$  a.s. on  $F$ . We deduce (2.4.38) and (2.4.27) holds.

Assume that  $\alpha \in (1, \infty)$ . The proof of (2.4.28) follows the same lines as the proof of (2.4.10) in Theorem 2.4.2. We show that  $X^{(\gamma)} = \Phi_\gamma(X)$  satisfies

$$|X_s^{(\gamma)}| \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\rho(\alpha - 1)(\tau_e - s))^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad \text{a.s., when } \alpha \in (1, \infty),$$

and we conclude by applying the change of time  $t = \varphi_\gamma^{-1}(s)$ .

Finally, assume that  $\alpha = 1$ . The same ideas as for the proof of the point v) of Theorem (2.4.2) are employed. By Ito's formula and the Dambis-Dubins-Schwartz theorem there exists a standard Brownian motion  $W$  such that

$$\frac{X_t}{v(t)} = \frac{x_0}{v(1)} + \tilde{B}_{\phi(t)}, \quad \text{with } \phi(t) := \int_1^t \frac{ds}{v(s)^2} \quad \text{and } v(t) := \exp \left( \rho \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta} \right).$$

Since

$$\phi(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} t & \text{if } \beta \in (1, \infty) \\ \sigma^2 & \text{if } \rho \in (0, \infty) \text{ and } \beta \in (-\infty, 1) \\ 2|\rho|t^\beta v(t)^{-2} & \text{if } \rho \in (-\infty, 0) \text{ and } \beta \in (-\infty, 1), \end{cases}$$

by using the usual properties of the Brownian motion we can get the convergence in distribution and the pathwise largest deviations. The recurrent or transient features are then deduced.  $\square$

## 2.5 Appendix

### 2.5.1 Proof of Lemma 2.3.8

To begin with, let us recall that  $\rho \in (0, \infty)$ ,  $\alpha \in (1, \infty)$ ,  $2\beta \in (\alpha + 1, \infty)$ , that  $\gamma = 2\beta/(\alpha + 1)$ ,  $t_1 = 1/(\gamma - 1)$ ,  $\delta = \gamma/2(\gamma - 1)$ , and that  $X_s^{(\gamma)}$  is the pathwise unique strong solution of equation (2.2.14), which explosion time is  $\eta_e \in [0, t_1] \cup \{\infty\}$ . The goal is to prove that  $\eta_e \neq t_1$  a.s. By Ito's formula, we can see that

$$dX_s^{(\gamma, t_1)} = (t_1 - s)^{\frac{1}{\alpha-1}} dW_s + d(s, X_s^{(\gamma, t_1)}) ds, \quad \text{with } X_s^{(\gamma, t_1)} := (t_1 - s)^{\frac{1}{\alpha-1}} X_s^{(\gamma)},$$

and

$$d(s, x) := \rho \frac{x(|x|^{\alpha-1} - \ell^{\alpha-1})}{t_1 - s} \quad \text{and} \quad \ell := \left( \frac{1 + \delta(\alpha - 1)}{\rho(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \in (0, \infty).$$

Roughly speaking, since  $x \cdot d(s, x) \geq 0$  (respectively  $\leq 0$ ), according as  $|x| \geq \ell$  (respectively  $\leq \ell$ ),  $0, -\infty$  and  $\infty$  are ‘‘attractive’’ levels, whereas  $-\ell$  and  $\ell$  are ‘‘repulsive’’ levels for the process  $X^{(\gamma, t_1)}$ . The strategy of the proof is as follows: firstly, we show that

$$\lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| \in \{0, \ell, \infty\} \quad \text{a.s. on } F := \{\eta_e = t_1\}. \quad (2.5.1)$$

Secondly, we shall prove that the following three events are of probability zero:

$$F_0 := F \cap \left\{ \lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| = 0 \right\}, \quad F_\ell := F \cap \left\{ \lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| = \ell \right\} \quad \text{and},$$

$$F_\infty := F \cap \left\{ \lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| = \infty \right\}. \quad (2.5.2)$$

We stress that the following reasoning will be performed by taking place on the event  $F$ . For simplicity, this condition will be understood and will be dropped along the following five steps.

**Step a).** We verify (2.5.1). Introduce

$$E := \left\{ \omega \in F : \liminf_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)} < \limsup_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)} \right\}.$$

Fix  $\omega \in E$  and suppose that  $\limsup_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) > \ell$ . We can pick two sequences of real numbers (which depends on  $\omega$ ),  $(s_n)$  and  $(u_n)$ , such that  $0 \leq u_n \leq s_n < t_1$  for all integers  $n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = t_1$ , and

$$X_{u_n}^{(\gamma, t_1)}(\omega) - X_{s_n}^{(\gamma, t_1)}(\omega) = \frac{1}{2} \left( \limsup_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) - \ell \right) > 0.$$

Moreover, this choice could be done such that for any  $s \in [u_n, s_n]$ ,  $X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) \geq \ell$ . Denote by  $M$  the martingale part of  $X^{(\gamma, t_1)}$ . Since the drift  $d(s, x)$  is nonnegative for all  $x \geq \ell$ , we deduce

$$\begin{aligned} |M_{s_n}(\omega) - M_{u_n}(\omega)| &= \left| X_{u_n}^{(\gamma, t_1)}(\omega) - X_{s_n}^{(\gamma, t_1)}(\omega) + \int_{u_n}^{s_n} d(s, X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega)) ds \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \limsup_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) - \ell \right) > 0. \end{aligned}$$

A similar argument works when  $0 < \limsup_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) \leq \ell$ , but also for the two symmetric situations  $\liminf_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) < -\ell$  and  $-\ell \leq \limsup_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)}(\omega) < 0$ . This means that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |M_{s_n}(\omega) - M_{u_n}(\omega)| > 0, \quad \text{a.s. on } E.$$

Since  $M$  is a.s. uniformly continuous on  $[0, t_1]$ , necessarily  $\mathbb{P}(E) = 0$ . We obtain equality (2.5.1) by noting that

$$\lim_{s \rightarrow t_1} |d(s, X_s^{(\gamma, t_1)})| = \infty \quad \text{a.s. on } F \cap \left\{ \lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| \notin \{0, \ell\} \right\}.$$

**Step b).** Note that  $h_s := X_s^{(\gamma)} - W_s$  is the solution of the ordinary differential equation

$$h'_s = \rho \operatorname{sgn}(h_s + W_s) |h_s + W_s|^\alpha - \delta \frac{h_s + W_s}{t_1 - s}.$$

We re-write the latter equation

$$h'_s = -\varepsilon_1(X_s^{(\gamma, t_1)}) \cdot \frac{\delta(h_s + W_s)}{t_1 - s}, \quad \text{with } \varepsilon_1(x) := 1 - \frac{\rho}{\delta} |x|^{\alpha-1}, \quad (2.5.3)$$

and

$$h'_s = \varepsilon_2(X_s^{(\gamma, t_1)}) \cdot \rho \operatorname{sgn}(h_s + W_s) |h_s + W_s|^\alpha, \quad \text{with } \varepsilon_2(x) := 1 - \frac{\delta}{\rho} |x|^{1-\alpha}. \quad (2.5.4)$$

**Step c).** Recall that  $\eta_e$  is the explosion time of  $X^{(\gamma)}$ . If we prove that  $X^{(\gamma)}$  is bounded on  $[0, t_1]$ , a.s. on  $F_0$ , necessarily  $\mathbb{P}(F_0) = 0$ . Since  $W$  is a.s. continuous on the compact  $[0, t_1]$ , it suffices to prove that  $h$  is bounded on  $[0, t_1]$ , a.s. on  $F_0$ . Set  $\kappa := \sup_{s \in [0, t_1]} |W_s|$ . We note that  $\lim_{s \rightarrow t_1} \varepsilon_1(X_s^{(\gamma, t_1)}) = 1$  a.s. on  $F_0$ . Therefore, for any  $\omega \in F_0$ , there exists  $u \in [0, t_1)$  such that, for all  $s \in [u, t_1)$ ,  $h_s(\omega) h'_s(\omega) \mathbb{1}_{\{|h_s(\omega)| \geq \kappa\}} \leq 0$ , by using (2.5.3). This implies that  $h_s^2(\omega)$  is bounded on  $[0, t_1]$  and we are done.

**Step d).** If we prove that  $\lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| = (\rho(\alpha - 1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$  a.s. on  $F_\infty$ , then, necessarily  $\mathbb{P}(F_\infty) = 0$ . Clearly,  $\lim_{s \rightarrow t_1} \varepsilon_2(X_s^{(\gamma, t_1)}) = 1$  a.s. on  $F_\infty$ . Then, by using (2.5.4) and the fact that  $W$  is bounded on  $[0, t_1]$ ,

$$\frac{|h_s|^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = \int_s^{t_1} \frac{h'_u}{\operatorname{sgn}(h_u) |h_u|^\alpha} du \underset{s \rightarrow t_1}{\sim} \rho(t_1 - s), \quad \text{a.s. on } F_\infty.$$

To conclude, it suffices to recall that  $X_s^{(\gamma, t_1)} = (t_1 - s)^{\frac{1}{\alpha-1}} (h_s + W_s)$ .

**Step e).** Similarly, if we prove that  $\lim_{s \rightarrow t_1} |X_s^{(\gamma, t_1)}| = \infty$  a.s. on  $F_\ell$ , then, necessarily  $\mathbb{P}(F_\ell) = 0$ . First, we show that

$$\lim_{s \rightarrow t_1} (X_s^{(\gamma, t_1)} - \ell)^2 = \infty, \quad \text{a.s. on } F_\ell^+ := F_\ell \cap \left\{ \lim_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)} = \ell \right\}. \quad (2.5.5)$$

Denote  $K_s := (X_s^{(\gamma, t_1)} - \ell)^2$ . By Ito's formula, we can write

$$dK_s = 2(t_1 - s)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sqrt{K_s} dB_s + \left( 2q(X_s^{(\gamma, t_1)}) \frac{K_s}{t_1 - s} + \frac{1}{2}(t_1 - s)^{\frac{2}{\alpha-1}} \right) ds,$$

where

$$B_s := \int_0^s \text{sgn}(K_u) dW_u \quad \text{and} \quad q(x) := \rho x \frac{|x|^{\alpha-1} - \ell^{\alpha-1}}{x - \ell}.$$

Introduce, for  $v \in [0, t_1)$ ,  $C_s(v)$  the pathwise unique strong solution of

$$dC_s(v) = 2(t_1 - s)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sqrt{C_s(v)} dB_s + \left( q_\infty \frac{C_s(v)}{t_1 - s} + \frac{1}{2}(t_1 - s)^{\frac{2}{\alpha-1}} \right) ds, \quad C_v(v) = K_v \mathbb{1}_{\{\eta_e > v\}},$$

where  $q_\infty := \lim_{x \rightarrow \ell} q(x) = \rho(\alpha - 1)\ell^{\alpha-1}$ . By comparison and localisation (see also the proof of (2.4.20)), we can show that for all  $s \in [v, t_1)$ ,

$$K_s \geq C_s(v) \quad \text{a.s. on} \quad \Omega_v := F_\ell^+ \cap \left\{ \inf_{v \in [0, t_1)} |2q(X_s^{(\gamma, t_1)})| \geq q_\infty \right\}.$$

By Ito's formula, the law of the process  $C(v)$  equals to the law of the square of the unique weak solution  $Q(v)$  of the equation

$$dQ_s(v) = (t_1 - s)^{\frac{1}{\alpha-1}} dB_s + \frac{q_\infty Q_s(v)}{2(t_1 - s)} ds, \quad Q_v(v) = \sqrt{C_v(v)}.$$

Since  $Q(v)$  is the solution of a linear equation, it is not difficult to see that  $\lim_{s \rightarrow t_1} |Q_s(v)| = \infty$  a.s. and then we deduce that  $\lim_{s \rightarrow t_1} C_s(v) = \infty$  a.s. Hence, for any  $v \in [0, t_1)$ ,  $\lim_{s \rightarrow t_1} K_s = \infty$  a.s. on  $\Omega_v$ . Since  $\lim_{s \rightarrow t_1} 2q(X_s^{(\gamma, t_1)}) > q_\infty$  a.s. on  $F_\ell^+$  we obtain that  $\lim_{s \rightarrow t_1} K_s = \infty$  a.s. on  $\cup_{v \in [0, t_1)} \Omega_v = F_\ell^+$ , which is (2.5.5). We conclude that  $\mathbb{P}(F_\ell \cap \{\lim_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)} = \ell\}) = 0$ . Clearly by similar arguments, we can prove that  $\mathbb{P}(F_\ell \cap \{\lim_{s \rightarrow t_1} X_s^{(\gamma, t_1)} = -\ell\}) = 0$ . Hence  $\mathbb{P}(F_\ell) = 0$ . The proof of the lemma is now complete.  $\square$

### 2.5.2 Proof of Lemma 2.4.5

Denote by  $\mathbb{P}_{u,z}$  the distribution of the diffusion  $Z$  with  $Z_u = z$  and  $\{T_{u,s} : 0 \leq u \leq s\}$  the associated time-inhomogeneous semi-group. Similarly, denote by  $\mathbb{P}_z$  the distribution of the diffusion  $H$  starting from  $z$  at initial time and  $\{T_s : s \geq 0\}$  the associated semi-group. Clearly, the diffusion coefficient  $(s, z) \mapsto a(u + s, z)$  and the drift  $(s, z) \mapsto d(u + s, z)$  of the diffusion  $s \mapsto Z_{u+s}$  satisfy the hypothesis of Theorem 11.1.4 in [90], p. 264. We deduce that, for every  $f \in C_b([0, \infty); \mathbb{R})$  and  $s \in [0, \infty)$ ,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} T_{u, u+s} f(z) = T_s f(z) \quad \text{uniformly in } z \text{ on compact subsets of } \mathbb{R}. \quad (2.5.6)$$

Moreover,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_s f(z) = \Pi(f) \quad \text{uniformly in } z \text{ on compact subsets of } \mathbb{R}. \quad (2.5.7)$$

Indeed, assume that  $z$  belongs to the compact set  $[b, c]$ . By using the strong Markov property, we can prove that for all  $s \in [0, \infty)$  and  $v \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{P}_b(H_s > v) \leq \mathbb{P}_z(H_s > v) \leq \mathbb{P}_c(H_s > v).$$

By using the ergodic theorem and these last inequalities we get the uniform convergence on compact subsets of  $\mathbb{R}$  in (2.5.7). Besides, by the Markov property, for all  $s, u \in [0, \infty)$ ,

$$\mathbf{T}_{0, u+s} f(z_0) - \Pi(f) = \mathbf{T}_{0, u} [\mathbf{T}_{u, u+s} f - \mathbf{T}_s f](z_0) + \mathbf{T}_{0, u} [\mathbf{T}_s f - \Pi(f)](z_0)$$

and clearly, for arbitrary  $r, s, u$  nonnegative real numbers,

$$|\mathbf{T}_{0, u+s} f(z_0) - \Pi(f)| \leq \sup_{z \in [-r, r]} \{|\mathbf{T}_{u, u+s} f(z) - \mathbf{T}_s f(z)| + |\mathbf{T}_s f(z) - \Pi(f)|\} + 4\|f\|_\infty \mathbb{P}_{z_0}(|Z_u| \geq r).$$

Thanks to (2.5.6) and (2.5.7), for all  $r, \varepsilon > 0$  there exists  $s_0, u_0 \in [0, \infty)$  such that for all  $u \geq u_0$ ,

$$|\mathbf{T}_{0, u+s_0} f(z_0) - \Pi(f)| \leq \varepsilon + 4\|f\|_\infty \sup_{s \geq 0} \mathbb{P}(|Z_s| \geq r).$$

Since  $Z$  is bounded in probability we deduce that  $\lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{T}_{0, u} f(z_0) = \Pi(f)$ . □

**Acknowledgements:** The authors are grateful to the Referee and the Associate Editor for careful reading of the first version of the manuscript and for useful comments and remarks.



## **Part II**

# **Diffusions inhomogènes en milieux aléatoires**



## Chapter 3

# Invariant distributions and scaling limits for some diffusions in time-varying random environments

**Abstract:** We consider a family of one-dimensional diffusions in a dynamical Wiener medium, which are random perturbations of the Ornstein-Uhlenbeck diffusion process. We prove quenched and annealed convergences in distribution and under weighted total variation norms. We find two stationary probability measures which are either the standard normal distribution or a quasi-invariant measure, depending on the environment, and which is naturally connected to a random dynamical system. Then we apply these results to the study of a model of time-inhomogeneous Brox's diffusions, which generalizes the diffusion studied by Brox (1986) and those investigated by Gradinaru and Offret (2011). We point out two distinct diffusive behaviours and we give the speed of convergences in the quenched situations.

**Key words:** time-dependent random environment; time-inhomogeneous Brox's diffusion; random dynamical system; Foster-Lyapunov drift condition; quasi-invariant random measure.

**Mathematics Subject Classification (2000):** 60K37; 60J60; 60F99; 37H99; 60H25; 37B25.

This chapter has been submitted to  
*Probability Theory and Related Fields*

### 3.1 Introduction

Random walks (RWs) in random environments (REs) and their continuous-time counterparts, the diffusions in random environment, pave the way for the study of a multitude of interesting cases, which have been tackled since the 70's in a large section of the literature.

Concerning the genesis of the theory, we allude to [14, 15], as regards the discrete-time situation, and to [19–21], as regards the continuous-time one. For more recent refinements and generalizations, we refer to [26–33, 93] and for a general review of the topic, we refer to [34].

Here we investigate one-dimensional diffusions evolving in dynamical Wiener mediums, which has some common features with those studied in [3, 20]. We give, under weighted total variation norms, quenched and annealed diffusive scaling limits, may depend on the environment, and thus which are not always normal distributions. We also give the speeds of convergence under the quenched distributions. In addition, we bring out a phase transition phenomenon, which is the analogue in RE, to a particular situation considered in [3].

RWs in dynamical REs has been widely and intensively considered in the past few years under several assumptions. Initially, space-time i.i.d. REs has been introduced and studied in [37–39]. Further difficulties arise when the fluctuations of the REs are i.i.d. in space and Markovian in time, case addressed in [41, 42], and major one arise when we consider space-time mixing REs, case recently studied in [43–45]. However, continuous-time diffusions in time-varying random environment has been sparsely investigate. Nevertheless, we can mention [46, 47] concerning the homogenization of diffusions in time-dependent random flows.

To recall some results in [20] and [3], introduce some notations. Consider the space

$$\Theta := \left\{ \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continuous, } \theta(0) = 0 \text{ and } \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{-2} \theta(x) = 0 \right\} \quad (3.1.1)$$

endowed by the standard  $\sigma$ -field  $\mathcal{B}$  generated by the Borel cylinder sets. It is classical that there exists a unique probability measure  $\mathcal{W}$  on  $(\Theta, \mathcal{B})$  such that  $\{\theta(\pm x) : \theta \in \Theta, x \geq 0\}$  are two independent standard Brownian motions. The probability distribution  $\mathcal{W}$  is called the Wiener measure. The space  $\Theta$  is naturally endowed with a structure of separable Banach space by setting  $\|\theta\|_{\Theta} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\theta(x)| / (1 + x^2)$  such that  $\mathcal{B}$  coincide with the Borel  $\sigma$ -field  $\mathcal{B}_{\Theta}$ . Brox make sense in [20] to solution of the informal diffusion equation

$$dX_t = dB_t - \frac{1}{2} \theta'(X_t) dt, \quad (3.1.2)$$

where  $\theta \in \Theta$  and  $B$  is a standard one-dimensional Brownian motion independent of  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ . Denoting by  $\mathbb{P}_{\theta}$  the quenched distribution of such solution and by  $\{S_{\lambda} : \lambda > 0\}$  the scaling transformations on  $\Theta$  defined by  $S_{\lambda} \theta(\star) := \lambda^{-\frac{1}{2}} \theta(\lambda \star)$ , the author shows that there exists a family of measurable functions  $\{b_h : h > 0\}$  on  $(\Theta, \mathcal{B})$  such that, for  $\mathcal{W}$ -almost surely  $\theta \in \Theta$ , the following convergence holds in probability

$$\frac{X_t}{(\log t)^2} - b_1 \left( S_{(\log t)^2} \theta \right) = \frac{X_t - b_{\log t}(\theta)}{(\log t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathbb{P}_{\theta}} 0. \quad (3.1.3)$$

The Wiener measure being invariant under the scaling transformations, if we denote by  $\hat{b}_1$  the distribution of  $b_1$  under  $\mathscr{W}$ , and by  $\hat{\mathbb{P}}$  the annealed distribution (the expectation of  $\mathbb{P}_\theta$  under  $\mathscr{W}$ ), the following convergence holds in distribution

$$\frac{X_t}{(\log t)^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \hat{b}_1. \quad (3.1.4)$$

The key to prove these results is to take full advantage of the representation of  $X$  in terms of a one-dimensional Brownian motion changed in scale and time, and of the invariance of the Brownian motions  $B$  and  $\theta$  under the scaling transformations  $S_\lambda$ . The author prove that the diffusion is localized in the valleys of the potential  $\theta$ , which are themselves characterized by  $b_1$ .

Then set  $W(x) := |x|^{1/2}$  and consider, for any  $\beta \in \mathbb{R}$ , the particular time-inhomogeneous singular stochastic differential equation studied in [3] and which is given by

$$dY_t = dB_t - \frac{1}{2} \frac{W'(Y_t)}{t^\beta} dt. \quad (3.1.5)$$

The authors show the existence of a pathwise unique strong solution and prove diffusive and subdiffusive scaling limits in distribution, depending on the position of  $\beta$  with respect to  $1/4$ . More precisely,

$$\frac{Y_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} \begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, & \text{when } \beta > 1/4, \\ k_c^{-1} e^{-\left[\frac{x^2}{2} + W(x)\right]} dx, & \text{when } \beta = 1/4, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

and

$$\frac{Y_t}{t^{2\beta}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{(d)} k_u^{-1} e^{-W(x)} dx, \quad \text{when } \beta < 1/4, \quad (3.1.7)$$

$k_c$  and  $k_u$  being two normalization positive constants. In order to prove the results in (3.1.6), they study the diffusion equation

$$dZ_t = dB_t - \frac{1}{2} [Z_t + e^{-rt} W'(Z_t)] dt. \quad (3.1.8)$$

This process is naturally related to equation (3.1.5), by setting  $r := \beta - 1/4$ , via a well chosen scaling transformation taking full advantage of the scaling property of the Brownian motion  $B$  and of the deterministic scaling property of the potential  $W$ . For more details we refer to [3]. We can expect to get similar results by replacing  $W$  in (3.1.5) by a typical Brownian path  $\theta \in \Theta$ , and this is one of the objects of this article.

The paper is organized as follows: in Section 3.2, we first introduce a diffusion equation in moving Wiener potential, which generalizes equation (3.1.8). Then we state our main results and we give the general strategy of the proofs. In Section 3.3, we apply these results to a model of time-inhomogeneous Brox's diffusions. This is a generalization of equation (3.1.5) and (3.1.2) and we obtain similar asymptotic behaviours as in (3.1.6). Thereafter, in Section 3.4, we prove existence, uniqueness and nonexplosion for the diffusion in time-dependent random environment that we consider (Theorem 3.2.2). In Section 3.5, we prove that this process is a strongly Feller

diffusion, which satisfies the lower local Aronson estimate and a kind of cocycle property (Theorem 3.2.3). In Section 3.6, we prove some convergence results in order to prove Theorems 3.2.4 and 3.2.5 in Sections 3.7 and 3.8. Finally, we give the proofs of some technical Lemmas in the Appendix 3.9.

## 3.2 Model and statement of results

### 3.2.1 Fluctuating Ornstein-Uhlenbeck potential

In the present paper, we study Brownian motions dynamics, in time-dependent Wiener mediums, given by the underlying dynamical random environment

$$\left\{ T_t \theta(x) := S_{e^{t/2}} \theta(x) = e^{-t/4} \theta(e^{t/2} x) : \theta \in \Theta, t, x \in \mathbb{R} \right\}. \quad (3.2.1)$$

The family  $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$  is a one-parameter group of transformations leaving invariant  $\mathscr{W}$  and such that under this probability measure,  $\{T_t \theta(x) : t \in \mathbb{R}\}$  is a stationary Ornstein-Uhlenbeck process having  $\mathcal{N}(0, x)$  as stationary distribution. Moreover, it can be proved that the dynamical system  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathscr{W}, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is ergodic (see Proposition 3.6.7).

We consider, for any  $r \in \mathbb{R}$ , the diffusion process  $Z$ , solution of the informal stochastic differential equation driven by a standard Brownian motion  $B$ , independent of  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathscr{W})$ ,

$$dZ_t = dB_t - \frac{1}{2} \partial_x V_\theta(t, Z_t) dt, \quad Z_s = z \in \mathbb{R}, t \geq s \geq 0, \theta \in \Theta. \quad (3.2.2)$$

with

$$V_\theta(t, x) := \frac{x^2}{2} + e^{-rt} T_t \theta(x). \quad (3.2.3)$$

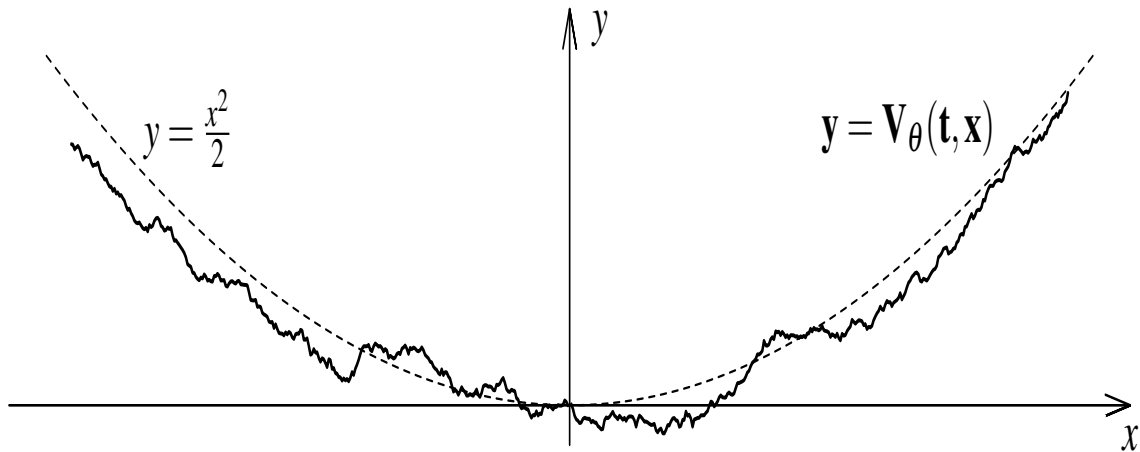


Figure 3.1: Realization of the random potential frozen at time  $t$

Note that when  $\theta(x) := W(x)$  defined in (3.1.5),  $T_t\theta$  in (3.2.3) is simply equal to  $\theta$  and equation (3.2.2) is nothing but equation (3.1.8). The diffusion process  $Z$  can be seen as a Brownian motion immersed in the random time-varying potential  $\{V_\theta(t, \cdot) : t \in \mathbb{R}\}$ , as well as an Ornstein-Uhlenbeck diffusion process, whose potential is perturbed by the dynamical Wiener medium  $\{e^{-rt} T_t\theta : t \in \mathbb{R}\}$ .

Moreover, by taking the terminology in [46], one can see  $Z$  as a distorted Brownian motion, whose drift is a Gaussian field  $\{\Gamma(t, x) : t, x \in \mathbb{R}\}$  having mean function  $m_\Gamma$  and covariance function  $C_\Gamma$  (here a Dirac measure) given by

$$m_\Gamma(t, x) = -\frac{x}{2} \quad \text{and} \quad C_\Gamma(t, x; s, z) = \frac{1}{4} e^{-\left[r(t+s) + \frac{|t-s|}{4}\right]} \delta(e^{t/2}x - e^{s/2}z).$$

We need to give a correct sense to solution of equation (3.2.2). Formally, we can see  $Z$  as the diffusion process, whose conditional infinitesimal generator, given the environment  $\theta \in \Theta$ , is

$$L_\theta := L_{\theta, t} + \frac{\partial}{\partial t} := \left[ \frac{1}{2} e^{V_\theta(t, x)} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-V_\theta(t, x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.2.4)$$

The domain and the so-called generalized domain of  $L_\theta$  are defined by

$$D(L_\theta) := \{F \in C^1 : e^{-V_\theta} \partial_x F \in C^1\} \quad \text{and} \quad \bar{D}(L_\theta) := \left\{ F \in \mathbf{W}_{\text{loc}}^{1, \infty} : e^{-V_\theta} \partial_x F \in \mathbf{W}_{\text{loc}}^{1, \infty} \right\} \quad (3.2.5)$$

where  $C^1$  and  $\mathbf{W}_{\text{loc}}^{1, \infty}$  denote the space of real continuous functions  $F(t, x)$  on  $[s, \infty) \times \mathbb{R}$  such that the partial derivatives  $\partial_t F$  and  $\partial_x F$  (in the sense of distributions) exist and are respectively continuous functions and locally bounded functions.

This kind of diffusion operators, with distributional drift, has been already study in [94, 95] in the case where the coefficients of the stochastic differential equation do not depend on time. Rigorously speaking, a weak solution to equation (3.2.2) is a solution to the martingale problem related to  $(L_\theta, D(L_\theta))$ .

**Definition 3.2.1.** *A continuous stochastic process  $\{Z_t : t \geq s\}$  defined on a given filtered probability space is said to be a weak solution to equation (3.2.2) if  $Z_s = z$  and if there exists an increasing sequence of stopping time  $\{\tau_n : n \geq 0\}$  such that, for all  $n \geq 0$  and  $F \in D(L_\theta)$ ,*

$$F(t \wedge \tau_n, Z_{t \wedge \tau_n}) - \int_s^{t \wedge \tau_n} L_\theta F(u, Z_u) du, \quad t \geq s, \quad \text{is a local martingale,}$$

with

$$\tau_e := \sup_{n \geq 0} \inf\{t \geq s : |Z_t| \geq n\} = \sup_{n \geq 0} \tau_n.$$

*A weak solution is global when the explosion time satisfies  $\tau_e = \infty$  a.s. and we said that the weak solution is unique if all weak solutions have the same distribution.*

We are now able to state our first result.



**Theorem 3.2.2.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $s \geq 0$  and  $z \in \mathbb{R}$ , there exists a unique global weak solution  $Z$  to equation (3.2.2). Moreover, there exists a standard Brownian motion  $B$  such that, for all  $F \in \overline{D}(L_\theta)$ ,*

$$F(t, Z_t) = F(s, z) + \int_s^t L_\theta F(u, Z_u) du + \int_s^t \partial_x F(u, Z_u) dB_u, \quad t \geq s. \quad (3.2.6)$$

Since the one-dimensional equation (3.2.2) is not time-homogeneous, there are not simple conditions which characterized the nonexplosion as in [20, 94, 95]. Therefore, the main difficulty is to construct Lyapunov functions, in order to prove the nonfiniteness of the explosion time (see Proposition 3.4.2).

Existence and uniqueness are obtained by considering the equivalent one-dimensional stochastic differential equation with random continuous coefficients (3.4.3) (see Proposition 3.4.1), which is naturally connected to equation (3.2.2), via the pseudo-scale function  $S_\theta$  defined in (3.4.1). This method is a generalization in the time-inhomogeneous setting of that employed in [20, 94, 95] and which uses the scale function.

### 3.2.2 Cocycle property and Aronson estimate

In the following, we denote by  $\mathbb{P}_{s,z}(\theta)$  the distribution of the weak solution of equation (3.2.2), called the quenched distribution, which existence is stated in Theorem 3.2.2. We introduce the canonical process  $\{X_t : t \geq 0\}$  on the space of continuous functions from  $[0, \infty)$  to  $\mathbb{R}$ , endowed with its natural Borel  $\sigma$ -field  $\mathcal{F}$ , and we denote by  $P_\theta(s, z; t, dx)$  and  $P_{s,t}(\theta)$ , the probability transition kernel and the associated Markov kernel defined, for all measurable nonnegative function  $F$  on  $\mathbb{R}$  by

$$P_{s,t}(\theta)F(z) := \mathbb{E}_{s,z}(\theta) [F(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} F(x) P_\theta(s, z; t, dx).$$

**Theorem 3.2.3.** *For all  $r \in \mathbb{R}$  and  $\theta \in \Theta$ ,  $\{\mathbb{P}_{s,z}(\theta) : s \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  is a strongly Feller continuous family. Moreover, the time-inhomogeneous semigroups  $\{P_{s,t}(\theta) : t \geq s \geq 0, \theta \in \Theta\}$  satisfies*

$$P_{s,s+t}(\theta) = P_{0,t}(e^{-rs} T_s \theta) \quad \text{and} \quad P_{0,s+t}(\theta) = P_{0,s}(\theta) P_{0,t}(e^{-rs} T_s \theta). \quad (3.2.7)$$

Besides,  $P_\theta(s, z; t, dx)$  admits a density  $p_\theta(s, z; t, x)$ , which is measurable with respect to  $(\theta, s, t, z, x)$  on  $\Theta \times \{t > s \geq 0\} \times \mathbb{R}^2$ , and which satisfies the lower local Aronson estimate: for all  $\theta \in \Theta$ ,  $T > 0$  and compact set  $C \subset \mathbb{R}$ , there exists  $M > 0$  such that, for all  $0 \leq s < t \leq T$  and  $z, x \in C$ ,

$$p_\theta(s, z; t, x) \geq \frac{1}{\sqrt{M(t-s)}} \exp\left(-M \frac{|z-x|^2}{t-s}\right). \quad (3.2.8)$$

The idea is to study the equivalent stochastic differential equation (3.4.3) and to prove a similar theorem (see Theorem 3.5.1) by using standard technics.

Besides, the transition density being measurable with respect to  $\theta$ , we can define the annealed distribution  $\widehat{\mathbb{P}}_{s,z}$  and the associated Markov kernel  $\widehat{P}_{s,t}$  as

$$\widehat{\mathbb{P}}_{s,z} := \mathbb{E}_{\mathscr{W}}[\mathbb{P}_{s,z}] := \int_{\Theta} \mathbb{P}_{s,z}(\omega) \mathscr{W}(\mathrm{d}\omega) \quad \text{and} \quad \widehat{P}_{s,t} := \mathbb{E}_{\mathscr{W}}[P_{s,t}] := \int_{\Theta} P_{s,t}(\omega) \mathscr{W}(\mathrm{d}\omega).$$

We point out that  $\{\widehat{P}_{s,t} : t \geq s \geq 0\}$  is no longer a semigroup and that the canonical process is not a Markov process under the annealed distribution  $\widehat{\mathbb{P}}_{s,z}$ . Moreover, in the light of (3.2.7), we can assume without loss of generality that  $s = 0$  in (3.2.2) and we set

$$\mathbb{P}_z(\theta) := \mathbb{P}_{0,z}(\theta), \quad P_{\theta}(z;t, \mathrm{d}x) = P_{\theta}(0,z;t, \mathrm{d}x), \quad p_{\theta}(z;t,x) = p_{\theta}(0,z;t,x)$$

and

$$P_t(\theta) := P_{0,t}(\theta), \quad \widehat{P}_t := \widehat{P}_{0,t}.$$

Furthermore, the case where  $r = 0$  is of particular interest since relation (3.2.7) can be written

$$P_{s,s+t}(\theta) = P_t(T_s\theta) \quad \text{and} \quad P_{s+t}(\theta) = P_s(\theta)P_t(T_s\theta). \quad (3.2.9)$$

Roughly speaking, the diffusion equation (3.2.2) is time-homogeneous in distribution in this situation. The relation (3.2.9) is called the cocycle property and it induces (see [53] for a definition) a random dynamical system (RDS) over  $(\Theta, \mathscr{B}, \mathscr{W}, (T_t))$  on the set  $\mathscr{M}$  of signed measures on  $\mathbb{R}$ , by setting, for all  $\nu \in \mathscr{M}$ ,

$$\nu P_t(\theta)(\mathrm{d}x) := \int_{\mathbb{R}} P_{\theta}(z;t, \mathrm{d}x) \nu(\mathrm{d}z) = \left( \int_{\mathbb{R}} p_{\theta}(z;t,x) \nu(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}x.$$

Note that the set of probability measure on  $\mathbb{R}$ , denoted by  $\mathscr{M}_1$ , is invariant under this RDS.

### 3.2.3 Quasi-invariant and stationary probability measures

To state our next important results, we need to introduce some additional notations and definitions. We said that  $\mu$  is a random probability measure on  $\mathbb{R}$ , over  $(\Theta, \mathscr{B}, \mathscr{W})$ , if  $\mu_{\theta} \in \mathscr{M}_1$  for  $\mathscr{W}$ -almost surely  $\theta$ , and if  $\theta \mapsto \mu_{\theta}(A)$  is measurable for all Borel set  $A$ . For such random probability measure  $\mu$ , we introduce the probability measure  $\widehat{\mu}$  defined by

$$\widehat{\mu} := \mathbb{E}_{\mathscr{W}}[\mu] := \int_{\Theta} \mu_{\omega} \mathscr{W}(\mathrm{d}\omega).$$

Let  $U_{\alpha}$  and  $V_{\alpha}$  be the functions on  $\mathbb{R}$  defined by

$$U_{\alpha}(x) := \exp\left(\alpha \frac{x^2}{2}\right) \quad \text{and} \quad V_{\alpha}(x) := \exp(|x|^{\alpha}). \quad (3.2.10)$$

The  $U_{\alpha}$ -total variation norm and the  $V_{\alpha}$ -total variation norm of  $\nu \in \mathscr{M}$  are defined as in [59] by

$$\|\nu\|_{U_{\alpha}} := \sup_{|f| \leq U_{\alpha}} |\nu(f)| \quad \text{and} \quad \|\nu\|_{V_{\alpha}} := \sup_{|f| \leq V_{\alpha}} |\nu(f)|,$$

the supremum being taken on the set of bounded measurable functions  $f$  on  $\mathbb{R}$ . Note that if  $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_1$  then  $\|\mathbf{v}\|_{U_\alpha}$  and  $\|\mathbf{v}\|_{V_\alpha}$  are nothing but  $\mathbf{v}(U_\alpha)$  and  $\mathbf{v}(V_\alpha)$ . In addition, we set

$$\mathcal{M}_{U_\alpha} := \{\mathbf{v} \in \mathcal{M} : \|\mathbf{v}\|_{U_\alpha} < \infty\}, \quad \mathcal{M}_{V_\alpha} := \{\mathbf{v} \in \mathcal{M} : \|\mathbf{v}\|_{V_\alpha} < \infty\}.$$

and

$$\mathcal{M}_{1,U_\alpha} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{U_\alpha}, \quad \mathcal{M}_{1,V_\alpha} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{V_\alpha}.$$

**Theorem 3.2.4.** *Assume that  $r = 0$ . There exists a random probability measure  $\mu$  on  $\mathbb{R}$  over  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ , unique up to a  $\mathcal{W}$ -null set, such that, for all  $t \geq 0$ ,*

$$\mu_\theta P_t(\theta) = \mu_{T_t\theta} \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.2.11)$$

Moreover, for all  $\alpha \in (0, 1)$ , the quasi-invariant measure satisfies

$$\mu_\theta \in \mathcal{M}_{1,U_\alpha} \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad \text{and} \quad \hat{\mu} \in \mathcal{M}_{1,V_\alpha}. \quad (3.2.12)$$

Furthermore, there exists  $\lambda > 0$  such that, for all  $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_{1,U_\alpha}$  and  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{M}_{1,V_\alpha}$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\mathbf{v}P_t(\theta) - \mu_{T_t\theta}\|_{U_\alpha})}{t} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.2.13)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{v}}\hat{P}_t - \hat{\mu}\|_{V_\alpha} = 0. \quad (3.2.14)$$

Linear RDSs has been studied in an extensive body of the literature. The dynamics (in particular the Lyapunov exponents) in the case where the discrete-time linear RDS acts on a finite dimensional space (the case of infinite products of random matrices) has been well understood for a long time, for instance in [54, 55], whereas the situation where the general linear RDS acts on a separable Banach space has been newly studied in [56].

Our goal in Theorem 3.2.4 is to obtain a quasi-invariant probability measure for the random Markov kernels  $P_t(\theta)$  and to give convergence results in the separable Banach space  $\mathcal{M}_{U_\alpha}$  (exponential convergence) and  $\mathcal{M}_{V_\alpha}$ . We need a kind of random Perron-Frobenius theorem, which has been, for example, obtained in [57] for infinite products of nonnegative matrices, and more recently in [58] for infinite products of stationary Markov kernels over a compact set.

However, the Markov operators that we consider act on the infinite dimensional space  $\mathcal{M}$  and are defined over the noncompact set  $\mathbb{R}$ . To overcome this problem, we need to see that  $U_\alpha$  and  $V_\alpha$  are Foster-Lyapunov functions (see Propositions 3.6.4 and 3.6.5). More precisely, we show that Lyapunov exponents can be chosen independently of the environment  $\theta$ , while keeping a control on the expectation of the  $U_\alpha$ -norm and the  $V_\alpha$ -norm. The classical method to construct Foster-Lyapunov functions for Markov kernels is to construct Lyapunov functions for the infinitesimal generators (see Lemma 3.6.2 and 3.6.3). Nonetheless, we stress that neither  $U_\alpha$  nor  $V_\alpha$  belong to the generalized domain  $\overline{D}(L_\theta)$  and we need to approximate uniformly

these functions by functions of this domain, while keeping a control on the expectation under the Wiener measure. This is possible by using the Hölder continuity of Brownian paths (see Proposition 3.6.1). Then, we use the explicit bound on convergence of time-inhomogeneous Markov chains (see Proposition 3.6.6), obtained from [59], via coupling constructions, Foster-Lyapunov conditions and the cocycle property, together with the ergodicity of the underlying dynamical system. We point out that the Aronson estimate (3.2.8) is necessary to the coupling constructions.

Furthermore, let us denote by  $\{U_t : t \geq 0\}$  the canonical process on the space  $\Xi$  of continuous functions from  $[0, \infty)$  to  $\Theta$ , endowed with its natural  $\sigma$ -field  $\mathcal{G}$ , and introduce the Markov kernels  $\Pi_{\theta, z}$  on  $(\Xi \times \Omega, \mathcal{G} \otimes \mathcal{F})$ , and the probability measure  $\bar{\mu}$  on  $(\Theta \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , respectively defined by the product and disintegration formula

$$\Pi_{\theta, z} := \delta_{\{T_t \theta : t \geq 0\}} \otimes \mathbb{P}_z(\theta) \quad \text{and} \quad \bar{\mu}(d\omega, dx) := \mathcal{W}(d\omega) \mu_\theta(dx). \quad (3.2.15)$$

Then we can see that  $\{(U_t, X_t) : t \geq 0\}$  is a time-homogeneous Markov process under  $\Pi_{\theta, z}$  such that  $\bar{\mu}$  is an invariant initial distribution. This process is called the skew-product Markov process (see [96, 97] for the discrete-time situation). By applying standard results on general time-homogeneous Markov processes (see for instance [98]) we deduce that for all  $F \in L^1(\Theta \times \mathbb{R}, \bar{\mu})$ ,  $z \in \mathbb{R}$  and  $\mathcal{W}$ -a.s.  $\theta \in \Theta$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(U_\tau, X_\tau) d\tau = \int_{\Theta \times \mathbb{R}} F(\omega, x) \bar{\mu}(d\omega, dx), \quad \Pi_{\theta, z}\text{-a.s.} \quad (3.2.16)$$

Moreover, we note that equation (3.2.12) provides some information on the tails of  $\mu_\theta$  and  $\hat{\mu}$ . Especially, one can see that for all  $\alpha \in (0, 1)$ , there exists a random variable  $C : \Theta \rightarrow (0, \infty)$  and  $\hat{C} > 0$  such that, for all  $r \geq 0$ ,

$$\mu_\theta((r, \infty)) \leq C_\theta \exp\left(-\alpha \frac{r^2}{2}\right) \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad \text{and} \quad \hat{\mu}((r, \infty)) \leq \hat{C} \exp(-r^\alpha). \quad (3.2.17)$$

**Theorem 3.2.5.** *Assume that  $r > 0$ . For all  $z \in \mathbb{R}$  and for  $\mathcal{W}$ -almost surely  $\theta \in \Theta$ , the following convergence holds under  $\mathbb{P}_z(\theta)$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t \stackrel{(d)}{=} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.2.18)$$

Here the space-time mixing environment is, contrary to Theorem 3.2.11, asymptotically negligible and the diffusion behaves, in long time, as the underlying Ornstein-Uhlenbeck process. Since the cocycle property (3.2.9) is no longer satisfied, we lose the structure of linear RDS. To prove this result, we use once again Proposition 3.6.6 but we also need to apply [3, Lemma 4.5] to the equivalent stochastic differential equation with random continuous coefficients (3.4.3).

Following the terminology used in [3], it is not difficult to see that this equation is asymptotically time-homogeneous and  $S_*\Gamma$ -ergodic, with  $S$  the scale function of the Ornstein-Uhlenbeck diffusion process having  $\Gamma \sim \mathcal{N}(0, 1)$  as stationary distribution and  $S_*\Gamma$  the pushforward distribution of  $\Gamma$  by  $S$ . As they mention in [3], the difficulty to apply this lemma is usually to show the boundedness in probability. To this end we need to use Foster-Lyapunov functions.

### 3.3 Application to time-inhomogeneous Brox's diffusions

We turn now to our main application, the study of the so-called time-inhomogeneous Brox's diffusion. We consider, for any  $\beta \in \mathbb{R}$ , the informal stochastic differential equation driven by a standard Brownian motion  $B$ , independent of the environment  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ ,

$$dY_t = dB_t - \frac{1}{2} \frac{\theta'(Y_t)}{t^\beta} dt, \quad Y_u = y \in \mathbb{R}, \quad t \geq u > 0, \quad \theta \in \Theta. \quad (3.3.1)$$

A solution to equation (3.3.1) is, in the same manner as in definition 3.2.1, the diffusion whose conditional generator, given  $\theta \in \Theta$ , is

$$\mathcal{L}_\theta := \left[ \frac{1}{2} e^{\frac{\theta(x)}{i\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{-\frac{\theta(x)}{i\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.3.2)$$

with domain

$$D(\mathcal{L}_\theta) := \left\{ F(t, x) \in C^1([u, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : e^{-\frac{\theta(x)}{i\beta}} \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) \in C^1([u, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \right\}. \quad (3.3.3)$$

As for equation (3.2.2), where we can assume without loss of generality that  $s = 0$ , we can assume that  $u = 1$  in equation (3.3.1). Moreover, as in (3.1.8), we assume that  $\beta = r - 1/4$  and we define, for all continuous functions  $\omega$  on  $[1, \infty)$  and all measurable function  $G$  on  $[1, \infty) \times \mathbb{R}$ ,  $\Phi_e(\omega)(t) := \omega(e^t)/e^{t/2}$  and  $\mathcal{E}G(t, x) := G(e^t, e^{t/2}x)$ .

It is a simple calculation to see that  $\mathcal{E} : D(\mathcal{L}_\theta) \rightarrow D(L_\theta)$  is a bijection and that  $L_\theta = \mathcal{E} \circ \mathcal{L}_\theta \circ \mathcal{E}^{-1}$ . In the same way as in [3, Proposition 2.1 and Section 2.2.1] we deduce that  $\{Y_t : t \geq 1\}$  is a weak solution to equation (3.3.1) if and only if  $\{Z_t := \Phi_e(Y_t) : t \geq 0\}$  is a weak solution to equation (3.2.2).

Then a direct application of Theorems 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 and 3.2.5 gives that for all  $\theta \in \Theta$ , there exists a unique irreducible strongly Feller diffusion process solution to equation (3.3.1). Let  $\mathbb{Q}_y(\theta)$  be its quenched distribution and denote by  $\{R_t(\theta) : t \geq 1\}$ , the time-inhomogeneous semigroup associated to  $\{X_t/\sqrt{t} : t \geq 1\}$  under  $\mathbb{Q}_y(\theta)$ , and by  $\widehat{\mathbb{Q}}_y$  and  $\{\widehat{R}_t : t \geq 1\}$  there annealed counterparts. We recall that  $S$  is the classical scaling transformation defined above (3.1.3). The following two corollaries are the analogous of Theorems 3.2.4 and 3.2.5.

**Corollary 3.3.1.** *Assume that  $\beta = 1/4$ . For all  $\alpha \in (0, 1)$  there exists  $\lambda > 0$  such that, for all  $\nu \in \mathcal{M}_{1, U_\alpha}$  and  $\widehat{\nu} \in \mathcal{M}_{1, V_\alpha}$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu R_t(\theta) - \mu_{S_{\sqrt{t}}\theta}\|_{U_\alpha})}{\log t} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.3.4)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\widehat{\nu} \widehat{R}_t - \widehat{\mu}\|_{V_\alpha} = 0. \quad (3.3.5)$$

**Corollary 3.3.2.** *Assume that  $\beta > 1/4$ . For all  $y \in \mathbb{R}$  and for  $\mathscr{W}$ -almost surely  $\theta \in \Theta$ , the following convergence holds under  $\mathbb{Q}_y(\theta)$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{\sqrt{t}} \stackrel{(d)}{=} \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.3.6)$$

The scaling limits (3.3.4), (3.3.5) and (3.3.6) are to be compared with the two convergences presented in (3.1.6) (the deterministic situation studied in [3]) and convergences (3.1.3) and (3.1.4) (the random time-homogeneous situation considered in [20]).

These results have some common features with those presented in [3] and [20] and also with those presented in [30, 31, 38, 39, 46, 47] concerning the quenched central limit theorem (3.3.6). There is still a phase transition phenomenon for  $\beta = 1/4$  and we obtain distinct quenched and annealed scaling limits for the critical point. Moreover, we are more accurate concerning the speed of convergence, which is polynomial here, and exponential in Theorem 3.2.4.

Nevertheless, the case where  $\beta < 1/4$  seems to be out of range of the present technics. In fact, we wait a stronger localization phenomenon and a subdiffusive behaviour of order  $t^{2\beta} \log^2(t)$  when  $\beta \geq 0$  and an almost sure convergence when  $\beta < 0$  (which can be seen as a generalization and mixture of results presented in (3.1.3), (3.1.4) and (3.1.7)). Note that in the case where  $\beta < 0$  equation (3.3.1) is (via a simple change of time) a damped stochastic differential equation in random environment.

Furthermore, some methods elaborated in this paper can be used to study a similar interesting situation where we replace the Brownian environment  $\theta$  in (3.3.1) by another self-similar process. These situations are object of some works in progress. The case of a multiplicative noise or similar equations in higher dimension seems to be more difficult.

### 3.4 Proof of Theorem 3.2.2

Theorem 3.2.2 will be a direct consequence of Propositions 3.4.1 and 3.4.2.

#### 3.4.1 Equivalent SDE and martingale problem

We introduce an auxiliary stochastic differential equation, which is naturally connected to equation (3.2.2). Let  $S$  and  $H$  be the functions on  $\Theta \times \mathbb{R}^2$  defined by

$$S_\theta(t, x) := \int_0^x e^{V_\theta(t, y)} dy = e^{-\frac{t}{2}} \int_0^{e^{\frac{t}{2}}x} e^{\left[\frac{e^{-tz/2} - e^{-(\frac{t}{4}+r)}\right]\theta(z)} dz \quad \text{and} \\ S_\theta(t, H_\theta(t, x)) = x. \quad (3.4.1)$$

Recall that the random potential  $V_\theta$  is defined in (3.2.3) and note that  $H_\theta$  is well defined since the so-called pseudo-scale function  $x \mapsto S_\theta(t, x)$  is an increasing bijection of  $\mathbb{R}$ . Moreover, by using the second representation of  $S_\theta$ , obtained by the change of time  $z := e^{t/2}y$ , we can see that  $S_\theta(t, x)$  and  $H_\theta(t, x)$  are continuously differentiable and we can set

$$\sigma_\theta(t, x) := (\partial_x S_\theta)(t, H_\theta(t, x)) \quad \text{and} \quad d_\theta(t, x) := (\partial_t S_\theta)(t, H_\theta(t, x)). \quad (3.4.2)$$

We can consider, for any  $\theta \in \Theta$ , the stochastic differential equation with continuous coefficients and driven by a standard Brownian motion  $B$ , independent of  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ ,

$$dZ_t = \sigma_\theta(t, Z_t) dB_t + d_\theta(t, Z_t) dt, \quad Z_s = z \in \mathbb{R}, \quad t \geq s \geq 0. \quad (3.4.3)$$

We can see that, for all  $(\theta, s, t, x) \in \Theta \times \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{cases} S_\theta(s+t, x) = S_{e^{-rs}T_s\theta}(t, x) \\ H_\theta(s+t, x) = H_{e^{-rs}T_s\theta}(t, x) \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \sigma_\theta(s+t, x) = \sigma_{e^{-rs}T_s\theta}(t, x) \\ d_\theta(s+t, x) = d_{e^{-rs}T_s\theta}(t, x) \end{cases}. \quad (3.4.4)$$

Let  $C^{1,2}$  be the space of continuous functions  $F(t, x)$  on  $[s, \infty) \times \mathbb{R}$  such that  $\partial_t F$ ,  $\partial_x F$  and  $\partial_{xx}^2 F$  exist and are continuous functions and denote by  $L_\theta$  the generator of (3.4.3) given by

$$L_\theta := L_{\theta, t} + \frac{\partial}{\partial t} := \left[ \frac{\sigma_\theta^2(t, x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + d_\theta(t, x) \frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial t}.$$

We can see that  $S_\theta$  and  $H_\theta$  induce two bijections from the space of measurable functions on  $[s, \infty) \times \mathbb{R}$  into itself, inverse to each other, by setting

$$\mathcal{S}_\theta F(t, x) := F(t, S_\theta(t, x)) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_\theta F(t, x) := F(t, H_\theta(t, x)).$$

By restriction, we get that  $\mathcal{S}_\theta$  and  $\mathcal{H}_\theta$  induce bijections

$$\mathcal{S}_\theta : C^{1,2} \longrightarrow D(L_\theta), \quad \mathcal{H}_\theta : D(L_\theta) \longrightarrow C^{1,2}$$

and

$$\mathcal{S}_\theta : \mathbf{W}_{\text{loc}}^{1,2,\infty} \longrightarrow \bar{D}(L_\theta), \quad \mathcal{H}_\theta : \bar{D}(L_\theta) \longrightarrow \mathbf{W}_{\text{loc}}^{1,2,\infty},$$

where  $\mathbf{W}_{\text{loc}}^{1,2,\infty}$  denote the Sobolev space of continuous functions  $F(t, x)$  on  $[s, \infty) \times \mathbb{R}$ , such that the partial derivatives  $\partial_t F$ ,  $\partial_x F$ ,  $\partial_t(\partial_x F)$  and  $\partial_{xx}^2 F$  exist and are locally bounded functions. Moreover, the infinitesimal generators  $L_\theta$  and  $L_\theta$  are equivalent. More precisely, they satisfy

$$\mathcal{S}_\theta^{-1} \circ L_\theta \circ \mathcal{S}_\theta = L_\theta. \quad (3.4.5)$$

**Proposition 3.4.1.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $s \geq 0$  and  $z, z \in \mathbb{R}$ , such that  $z := S_\theta(s, z)$ , the process  $\{Z_t : t \geq s\}$  is a weak solution to equation (3.2.2) if and only if  $\{Z_t := S_\theta(t, Z_t) : t \geq s\}$  is a weak solution (up to the explosion time  $\tau_e$ ) to the stochastic differential equation (3.4.3). Furthermore, there exists a unique weak solution  $(Z, B)$  and, for all  $G \in \mathbf{W}_{\text{loc}}^{1,2,\infty}$ ,*

$$G(t, Z_t) = G(s, z) + \int_s^t L_\theta G(u, Z_u) du + \int_s^t \partial_x G(u, Z_u) \sigma_\theta(u, Z_u) dB_u, \quad s \leq t < \tau_e. \quad (3.4.6)$$

**Proof.** Assume that  $Z$  be a weak solution to equation (3.4.3). By using the Ito formula,  $Z$  solves the martingale problem related to  $(L_\theta, C^{1,2})$ . Therefore,  $Z_s = z$  and there exists an increasing sequence of stopping time  $\{\tau_n : n \geq 0\}$  such that, for all  $n \geq 0$  and  $G \in C^{1,2}$ ,

$$G(t \wedge \tau_n, Z_{t \wedge \tau_n}) - \int_s^{t \wedge \tau_n} L_\theta F(u, Z_u) du, \quad t \geq s, \quad \text{is a local martingale,}$$

with

$$\tau_e := \sup_{n \geq 0} \inf\{t \geq s : |Z_t| \geq n\} = \sup_{n \geq 0} \tau_n.$$

We deduce from relation (3.4.5) that  $\{Z_t := H_\theta(t, Z_t) : t \geq s\}$  is a weak solution to (3.2.2) since  $Z_s = z$ , for all  $n \geq 0$  and  $F \in D(L_\theta)$ ,  $G := \mathcal{H}_\theta F \in C^{1,2}$ , and

$$F(t \wedge \tau_n, Z_{t \wedge \tau_n}) - \int_s^{t \wedge \tau_n} L_\theta F(u, Z_u) du = G(t \wedge \tau_n, Z_{t \wedge \tau_n}) - \int_s^{t \wedge \tau_n} L_\theta G(u, Z_u) du, \quad t \geq s,$$

is a local martingale. A similar reasoning allow us to show that if  $Z$  is a weak solution to (3.2.2) then  $\{Z_t := S_\theta(t, Z_t) : t \geq s\}$  is a weak solution to (3.4.3).

Moreover, equation (3.4.3) has continuous coefficients  $\sigma_\theta$  and  $d_\theta$  and is strictly elliptic (that is  $\sigma_\theta > 0$ ) and we deduce, by using classical arguments of localization (see, for instance, [90, p. 250-251]), that there exists a unique weak solution  $(Z, B)$ . Furthermore, by using the classical Ito-Krylov formula (see, for instance, [99, Chapter 10] or [100, p. 134]), we obtain (3.4.6) since, for all  $n \geq 0$  and  $G \in \mathbf{W}_{\text{loc}}^{1,2,\infty}$ ,

$$G(t \wedge \tau_n, Z_{t \wedge \tau_n}) = G(s, z) + \int_s^{t \wedge \tau_n} L_\theta G(u, Z_u) du + \int_s^{t \wedge \tau_n} \partial_x G(u, Z_u) \sigma_\theta(u, Z_u) dB_u, \quad t \geq s,$$

with

$$\tau_n := \inf\{t \geq s : |Z_t| \geq n\}.$$

□



### 3.4.2 Chain rule and nonexplosion

We define, for all  $\theta \in \Theta$  and  $\varphi \in W_{\text{loc}}^{1,\infty}$ , the function  $F_\theta^\varphi \in D(\bar{L}_\theta)$  by

$$F_\theta^\varphi(t, x) := \int_0^x \exp[e^{-rt} T_t \theta(y)] \varphi(t, y) dy \in \bar{D}(L_\theta).$$

By standard computations, we can get the following chain rules

$$L_{\theta,t} F_\theta^\varphi(t, x) = \frac{1}{2} \exp[e^{-rt} T_t \theta(x)] (\partial_x \varphi(t, x) - x \varphi(t, x)), \quad (3.4.7)$$

and

$$\begin{aligned} \partial_t F_\theta^\varphi(t, x) &= \frac{x}{2} \exp[e^{-rt} T_t \theta(x)] \varphi(t, x) - \frac{1}{2} F_\theta^\varphi(t, x) + \\ &\int_0^x \exp[e^{-rt} T_t \theta(y)] \left( \partial_t \varphi(t, y) - \frac{y}{2} \partial_x \varphi(t, y) - \left( \frac{1}{4} + r \right) [e^{-rt} T_t \theta(y)] \varphi(t, y) \right) dy. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

**Proposition 3.4.2.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $s \geq 0$  and  $z \in \mathbb{R}$ , the explosion time of any weak solution  $Z$  to equation (3.2.2) is infinite a.s.*

**Proof.** Let  $U_\alpha$ , with  $\alpha \in (0, 1/2)$ , the function defined in (3.2.10) and set

$$U_\theta(t, x) := 1 + \int_0^x \exp[e^{-rt} T_t \theta(y)] U'_\alpha(y) dy \in \bar{D}(L_\theta).$$

We shall prove that  $U_\theta$  is a Lyapunov function, in the sense that, for all  $T > 0$ , there exists  $\lambda > 0$  such that, for all  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$L_\theta U_\theta(t, x) \leq \lambda U_\theta(t, x) \quad \text{and} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{0 \leq t \leq T} U_\theta(t, x) = \infty. \quad (3.4.9)$$

The second relation in (3.4.9) is clear since  $\theta$  is continuous and  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta(x)/x^2 = 0$ . Then by using (3.4.7) and (3.4.8), we can see that

$$L_{\theta,t} U_\theta(t, x) = -\alpha(1 - \alpha) \left( 1 - \frac{1}{(1 - \alpha)x^2} \right) x^2 \exp[e^{-rt} T_t \theta(x)] U_\alpha(x) \quad (3.4.10)$$

and

$$\begin{aligned} \partial_t U_\theta(t, x) &= - \int_0^x \left( \frac{\alpha y^2}{2} + \left( \frac{1}{4} + r \right) [e^{-rt} T_t \theta(y)] \right) \exp[e^{-rt} T_t \theta(y)] U'_\alpha(y) dy \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} x^2 \exp[e^{-rt} T_t \theta(x)] U_\alpha(x) - (U_\theta(t, x) - 1). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Moreover, we can see that for  $x$  sufficiently large

$$-\alpha(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{(1-\alpha)x^2}\right)+\frac{\alpha}{2}<0. \quad (3.4.12)$$

Therefore, we get from (3.4.12) and (3.4.10) that there exist  $L_1 > 0$  and a compact set  $C$  such that, for all  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$L_{\theta,t}U_{\theta}(t,x)+\frac{\alpha}{2}x^2\exp\left[e^{-rt}T_t\theta(x)\right]U_{\alpha}(x)\leq L_1\mathbb{1}_C(x)\leq L_1U_{\theta}(t,x). \quad (3.4.13)$$

Besides, can see that there exists  $L_2 > 0$  such that, for all  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x\left(\frac{\alpha}{2}y^2+\left(\frac{1}{4}+r\right)\left[e^{-rt}T_t\theta(y)\right]\right)\exp\left[e^{-rt}T_t\theta(y)\right]U'_{\alpha}(y)dy\geq \\ \int_0^x\left(\frac{\alpha}{4}y^2-L_2\right)\exp\left[e^{-rt}T_t\theta(y)\right]U'_{\alpha}(y)dy\geq-L_2U_{\theta}(t,x). \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

We deduce from (3.4.14), (3.4.13) and (3.4.11) that (3.4.9) is satisfied with  $\lambda := L_1 + L_2$  and by using a classical argument (see for instance [90, Theorem 10.2.1]), we can complete the proof.  $\square$

### 3.5 Proof of Theorem 3.2.3

We shall prove that it suffices to prove the analogous theorem (see Theorem 3.5.1 below) for the diffusion equation (3.4.3).

To this end, let  $\mathbf{P}_{s,z}(\theta)$  be the distribution of the solution to (3.4.3) and denote by  $P_\theta(s, z; t, dx)$  and by  $P_{s,t}(\theta)$ , the transition kernel and the Markov kernel defined, for all measurable nonnegative function  $F$  by

$$P_{s,t}(\theta)F(z) := \mathbf{E}_{s,z}[F(X_t)] := \int_{\mathbb{R}} F(x)P_\theta(s, z; t, dx).$$

Assume that  $\{\mathbf{P}_{s,z}(\theta) : s \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  is strongly Feller continuous. One get by using Proposition 3.4.1 that, for all bounded measurable function  $F$  on  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ ,  $t \geq s \geq 0$  and  $z \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{E}_{s,z}(\theta)[F(t, X_t)] = \mathbf{E}_{s, S_\theta(s,z)}(\theta)[F(t, H_\theta(t, X_t))].$$

Since  $S_\theta$  is continuous on  $\mathbb{R}^2$ , we deduce that  $\{\mathbf{P}_{s,z}(\theta) : s \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  is also strongly Feller continuous.

Assume that  $\{P_{s,t}(\theta) : t \geq s \geq 0\}$  satisfies relations (3.5.1). Then we get from (3.4.4) and again Proposition 3.4.1 that, for all nonnegative function  $F$  on  $\mathbb{R}$ ,  $s, t \geq 0$  and  $z \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} P_{s,s+t}(\theta)F(z) &= P_{s,s+t}(\theta)[F(H_\theta(s+t, \star))](S_\theta(s, z)) \\ &= P_{0,t}(e^{-rs}T_s\theta)[F(H_{e^{-rs}T_s\theta}(t, \star))](S_{e^{-rs}T_s\theta}(0, z)) = P_{0,t}(e^{-rs}T_s\theta)F(z). \end{aligned}$$

By using the Markov property, we obtain relations (3.2.9).

Finally, assume that  $P_\theta(s, z; t, dx)$  admits a measurable density  $p_\theta(s, z; t, x)$  which satisfies the lower local Aronson estimate (3.5.2). Once again, Proposition 3.4.1 applies and gives that  $P_\theta(s, z; t, dx)$  admits a density  $p$  such that

$$p_\theta(s, z; t, x) = p_\theta(s, S_\theta(s, z); t, S_\theta(t, x))e^{V_\theta(t, x)}.$$

Since  $S_\theta$  is a locally Lipschitz function, we deduce that  $p_\theta(s, z; t, dx)$  is also measurable and satisfies (3.2.8). This completes the proof, excepted for Theorem 3.5.1.

**Theorem 3.5.1.** *For all  $r \in \mathbb{R}$  and  $\theta \in \Theta$ ,  $\{\mathbf{P}_{s,z}(\theta) : s \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  is a strongly Feller continuous family. Moreover, the time-inhomogeneous semigroups  $\{P_{s,t}(\theta) : t \geq s \geq 0, \theta \in \Theta\}$  satisfies*

$$P_{s,s+t}(\theta) = P_{0,t}(e^{-rs}T_s\theta) \quad \text{and} \quad P_{0,s+t}(\theta) := P_{0,s}(\theta)P_{0,t}(e^{-rs}T_s\theta). \quad (3.5.1)$$

Besides,  $P_\theta(s, z; t, dx)$  admits a density  $p_\theta(s, z; t, x)$ , which is measurable with respect to  $(\theta, s, t, z, x)$  on  $\Theta \times \{t > s \geq 0\} \times \mathbb{R}^2$ , and which satisfies the lower local Aronson estimate: for all  $\theta \in \Theta$ ,  $T > 0$  and compact set  $C \subset \mathbb{R}$ , there exists  $M > 0$  such that, for all  $0 \leq s < t \leq T$  and  $z, x \in C$ ,

$$p_\theta(s, z; t, x) \geq \frac{1}{\sqrt{M(t-s)}} \exp\left(-M \frac{|z-x|^2}{t-s}\right). \quad (3.5.2)$$

**Proof of Theorem 3.5.1.** Since equation (3.4.3) is strictly elliptic ( $\sigma_\theta > 0$ ) and has continuous coefficients, it is classical (see for instance [90, Corollary 10.1.4]) that its unique weak solution is a strongly Feller continuous diffusion, which admits transition densities  $p_\theta(s, z; t, x)$  measurable with respect to  $(s, t, z, x) \in \{t > s \geq 0\} \times \mathbb{R}^2$  for each  $\theta \in \Theta$ .

Moreover, we can see that relations (3.5.1) are direct consequences of the Markov property and the right hand side of (3.4.4) and we need to prove the measurability of  $p$  on  $\Theta \times \{t > s \geq 0\} \times \mathbb{R}^2$  and the lower local Aronson estimate (3.5.2). Set, for all  $\delta \geq 0$ ,

$$P_{\delta, \theta}(s, z; t, dx) := \mathbf{P}_{s, z}(\theta)(X_t \in dx, \tau_\delta(s) > t) = \mathbf{P}_{s, z}^{(\delta)}(\theta)(X_t \in dx, \tau_\delta > t)$$

with

$$\tau_\delta(s) := \inf\{t \geq s : |X_t| \geq \delta\} \wedge T.$$

Here  $\mathbf{P}_{s, z}^{(\delta)}(\theta)$  denotes the distribution of the truncated diffusion process, whose coefficients are given on  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  by

$$d_\theta^{(\delta)}(t, x) := d_\theta(t \wedge T, (x \wedge \delta) \vee -n) \quad \text{and} \quad \sigma_\theta^{(\delta)}(t, x) := \sigma_\theta(t \wedge T, (x \wedge \delta) \vee -\delta).$$

It is not difficult to see that the fundamental solution  $p_\theta^{(\delta)}$  of the associated partial differential equation (PDE) satisfies the global Aronson estimates.

Indeed, even if the associated partial differential operator is not of divergence form, we can see that it is equivalent to a uniformly elliptic divergence type operator, with bounded coefficients, employing the change of scale defined on  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  by

$$k_\theta^{(\delta)}(t, x) := \int_0^x \frac{1}{(\sigma_\theta^{(\delta)}(t, y))^2} \exp\left(2 \int_0^y \frac{d_\theta^{(\delta)}(t, z)}{(\sigma_\theta^{(\delta)}(t, z))^2} dz\right) dy.$$

Hence the results in [101] apply and we deduce that the associated fundamental solution  $p_\theta^{(\delta)}$  satisfies the global lower local Aronson estimate since  $k_\theta^{(\delta)}$  is locally Lipschitz. Therefore, there exists  $K > 0$  such that, for all  $0 \leq s < t$  and  $x, z \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{K\sqrt{t-s}} \exp\left(-\frac{K|x-z|^2}{t-s}\right) \leq p_\theta^{(\delta)}(s, z, t, x) \leq \frac{K}{\sqrt{t-s}} \exp\left(-\frac{|x-z|^2}{K(t-s)}\right). \quad (3.5.3)$$

Following exactly the same lines as the proof of [102, Theorem II.1.3] in the time-homogeneous situation, we can prove that  $P_{\delta, \theta}(s, z; t, dx)$  admits a density  $p_{\delta, \theta}(s, z, t, x)$  which satisfies the lower local Aronson estimate (3.5.2). Since  $p \geq p_\delta$  we deduce that  $p$  satisfies also (3.5.2).

It remains to prove the measurability of  $p$ . Since  $(\theta, t, x) \mapsto \sigma_\theta(t, x)$  and  $(\theta, t, x) \mapsto d_\theta(t, x)$  are uniformly continuous on bounded sets of  $\Theta \times \mathbb{R}^2$ , we can apply [90, Theorem 11.1.4] and we deduce that, for all bounded measurable function  $G$  on  $\Omega$ ,  $(\theta, s, z) \mapsto \mathbf{E}_{s, z}(\theta)[G]$  is measurable on  $\Theta \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . It is then not difficult to see that  $p$  is measurable on  $\Theta \times \{t > s \geq 0\} \times \mathbb{R}^2$ . The proof is done.  $\square$

### 3.6 Preliminaries of Theorems 3.2.4 and 3.2.5

We need to prove some auxiliary results.

#### 3.6.1 Uniform affine approximations of the environment

In the following, set, for all  $\gamma \in (0, 1/2)$ ,

$$H_\gamma(\theta) := \sup_{n \geq 0} \frac{\|\theta^+\|_{\gamma,n} + \|\theta^-\|_{\gamma,n}}{L(n)}, \quad \Theta_\gamma := \{0 < H_\gamma < \infty\}, \quad (3.6.1)$$

with, for all  $n \geq 0$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\theta^\pm\|_{\gamma,n} := \sup_{n \leq x < y \leq n+1} \frac{|\theta(\pm y) - \theta(\pm x)|}{|y - x|^\gamma} \quad \text{and} \quad L(x) := \sqrt{1 + \log(1 + |x|)}. \quad (3.6.2)$$

In addition, we denote for all  $\varepsilon > 0$  by  $A_{\gamma,\varepsilon}(\theta)$  (see figure 3.2 below) the piecewise linear approximation of  $\theta$  associated to the subdivision  $S_{\gamma,\varepsilon} := \{x_{n,k} : n \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq m_n\}$  defined by  $m_n := h_n^{-1} := \left\lceil L^{\frac{1}{\gamma}}(n)\varepsilon^{-1} \right\rceil + 1$ ,  $x_{n,k} := n + kh_n$  and  $x_{-n,k} := -x_{n,k}$ .

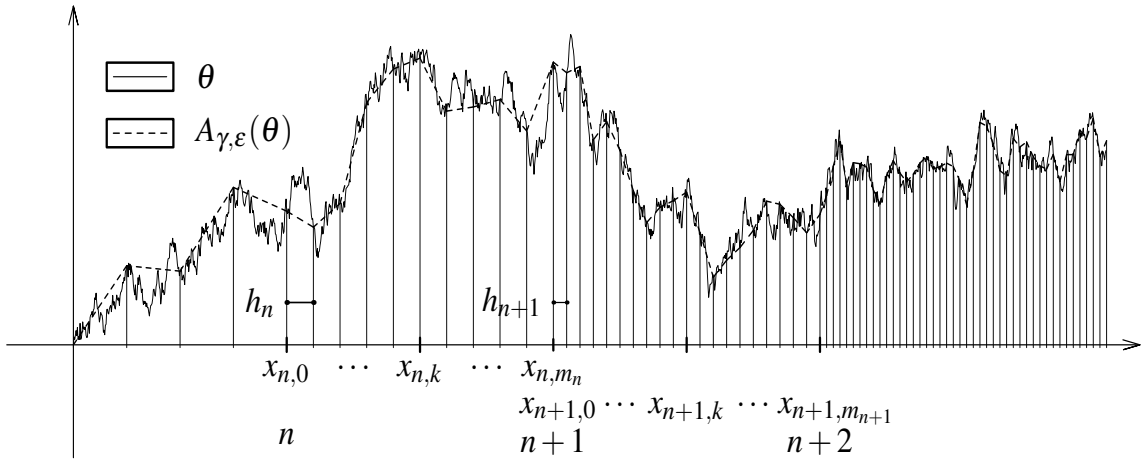


Figure 3.2: Affine approximation of a typical Brownian path  $\theta$

Then we introduce the random affine approximation  $W_{\gamma,\varepsilon}$  defined, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$  by

$$W_{\gamma,\varepsilon}(\theta) := A_{\gamma,\eta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)}(\theta), \quad \text{with} \quad \eta_{\gamma,\varepsilon}(\theta) := \left( \frac{\varepsilon}{H_\gamma(\theta)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (3.6.3)$$

and we set

$$\Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x) := \theta(x) - W_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x) \quad \text{and} \quad D_{\gamma,\varepsilon}(\theta) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|W'_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x)|}{L^{\frac{1}{\gamma}}(x)}. \quad (3.6.4)$$

**Proposition 3.6.1.** *For all  $\gamma \in (0, 1/2)$ ,  $\Theta_\gamma$  is  $(T_t)$ -invariant and there exists  $\alpha > 0$  such that*

$$\mathbb{E}_{\mathscr{W}} \left[ \exp(\alpha H_\gamma^2) \right] := \int_{\Theta} \exp(\alpha H_\gamma^2(\theta)) \mathscr{W}(d\theta) < \infty. \quad (3.6.5)$$

Moreover, for all  $\varepsilon > 0$  and  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad D_{\gamma, \varepsilon}(\theta) \leq \varepsilon \left( 1 + (\varepsilon^{-1} H_\gamma(\theta))^{\frac{1}{\gamma}} \right). \quad (3.6.6)$$

**Proof.** Clearly  $H_\gamma : \Theta \rightarrow [0, \infty]$  is a seminorm and to get inequality (3.6.5) it suffices to apply the Fernique theorem presented in [103]. We need to check that  $H_\gamma < \infty$   $\mathscr{W}$ -a.s.

By using the Hölder continuity of the Brownian motion on compact sets, the seminorm defined on  $\Theta$  by  $N(\theta) := \|\theta^+\|_{\gamma, 1} + \|\theta^-\|_{\gamma, 1}$  is finite a.s.

Moreover, by using the Fernique theorem and the Markov inequality, we deduce that there exists  $c, \beta > 0$  such that, for  $r$  sufficiently large,

$$F(r) := \mathscr{W}(\{N \geq r\}) \leq \mathbb{E}_{\mathscr{W}}[\exp(\beta N^2)] e^{-\beta r^2} \leq c e^{-\beta r^2}.$$

Besides, the random variables  $(\theta \mapsto \|\theta^+\|_{\gamma, n} + \|\theta^-\|_{\gamma, n})$ ,  $n \geq 0$ , being i.i.d. by using the Markov property, we get that

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathscr{W}(\{H_\gamma \leq h\}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - F(hL(n))) \geq \lim_{h \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{c}{n\beta h^2} \right) = 1.$$

Fernique's theorem applies and we deduce (3.6.5). The fact that  $\Theta_\gamma$  is  $(T_t)$ -invariant is obtained by noting that, for all  $\theta \in \Theta$  and  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$H_\gamma(T_t \theta) \leq 2 \exp \left( \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) \frac{t}{2} \right) \left( \exp \left( \frac{t}{2} \right) + 1 \right) \sup_{n \geq 0} \left( \frac{L \left( (n+1)e^{\frac{t}{2}} + 1 \right)}{L(n)} \right) H_\gamma(\theta).$$

Furthermore, let  $\varepsilon > 0$ ,  $n \geq 0$  and  $x, y \in \mathbb{R}$  be such that  $n \leq x, y \leq n+1$  and  $|y-x| \leq h_n$ , where  $h_n$  denotes the step of the subdivision  $S_{\gamma, \varepsilon}$  defined in Figure 3.2. We can see that

$$|\theta^\pm(y) - \theta^\pm(x)| \leq L(n) H_\gamma(\theta) h_n^\gamma \leq H_\gamma(\theta) \varepsilon^\gamma$$

and when  $|y-x| = h_n$ , we get

$$\frac{|\theta^\pm(y) - \theta^\pm(x)|}{|y-x|} \leq L(n) H_\gamma(\theta) |y-x|^{\gamma-1} \leq H_\gamma(\theta) \varepsilon^\gamma h_n^{-1} \leq H_\gamma(\theta) \varepsilon^\gamma \left( \varepsilon^{-1} L^{\frac{1}{\gamma}}(n) + 1 \right).$$

Therefore, we obtain that

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\theta(x) - A_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)| \leq H_\gamma(\theta) \varepsilon^\gamma \quad \text{and} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|A'_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)|}{L^{\frac{1}{\gamma}}(x)} \leq H_\gamma(\theta) \varepsilon^{\gamma-1} (1 + \varepsilon).$$

Replacing in the two last inequalities  $\varepsilon$  by  $\eta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)$ , defined in (3.6.3), we deduce the proposition.  $\square$

### 3.6.2 Random Foster-Lyapunov drift conditions

Let  $\varphi$  be a twice continuously differentiable function from  $[1, \infty)$  into itself such that,  $\varphi(v) = 1$  on  $[1, 2]$ ,  $\varphi(v) = v$  on  $[3, \infty)$  and  $\varphi(v) \leq v$  on  $[0, \infty)$ . We set, for all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1/2)$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $t, x \in \mathbb{R}$ ,

$$G_\alpha(x) := \varphi(V_\alpha(x)), \quad G_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) := 1 + \int_0^x \exp(e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(y)) G'_\alpha(y) dy \in \overline{D}(L_\theta) \quad (3.6.7)$$

and

$$F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) := 1 + \int_0^x \exp(e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(y)) U'_\alpha(y) dy \in \overline{D}(L_\theta). \quad (3.6.8)$$

We need the following two results, whose proofs are postponed to the Appendix.

**Lemma 3.6.2.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1/2)$ ,  $T > 0$  and  $\lambda > 0$ , there exists  $\bar{\varepsilon} > 0$  such that, for all  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ , there exist a random variable  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$  and  $p, k, c > 0$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$L_\theta F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) \leq -\lambda F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) + B_\theta, \quad \text{with } B_\theta \leq k \exp(c H_\gamma^p(\theta)). \quad (3.6.9)$$

**Lemma 3.6.3.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (\alpha/2, 1/2)$ ,  $T > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $\lambda > 0$ , there exist a random variable  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$ ,  $k, c > 0$  and  $0 < p < 2$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$L_\theta G_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) \leq -\lambda G_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) + B_\theta, \quad \text{with } B_\theta \leq k \exp(c H_\gamma^p(\theta)). \quad (3.6.10)$$

These results allow us to prove the following two propositions.

**Proposition 3.6.4.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1/2)$  and  $\eta, \tau, T > 0$ , there exists a random variable  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$  and  $k, c, p > 0$  such that, for all  $\kappa > 0$ ,  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$P_{s,t}(\theta) U_\alpha(x) \leq (\eta + \kappa + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) U_\alpha(x) + B_\theta \mathbb{1}_{x \in \{U_\alpha \leq \kappa^{-1} B_\theta\}}, \quad (3.6.11)$$

with

$$B_\theta \leq k \exp(c H_\gamma^p(\theta)).$$

**Proposition 3.6.5.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (\alpha/2, 1/2)$  and  $\eta, \tau, T > 0$ , there exist a random variable  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$ ,  $k, c > 0$  and  $0 < p < 2$  such that, for all  $\kappa > 0$ ,  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,*

$$P_{s,t}(\theta) V_\alpha(x) \leq (\eta + \kappa + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) V_\alpha(x) + B_\theta \mathbb{1}_{x \in \{V_\alpha \leq \kappa^{-1} B_\theta\}}, \quad (3.6.12)$$

with

$$B_\theta \leq k \exp(c H_\gamma^p(\theta)).$$

**Proof of Proposition 3.6.4.** Set  $q := 1 \vee e^{-rT}$  and let  $\lambda > e$  and  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$  be such that  $e^{-\lambda\tau+2q} \leq \eta$  and  $e^{2q\varepsilon} \leq \eta + 1$ . Note that Ito's formula (3.2.6) implies that there exists a Brownian motion  $W$  such that, under  $\mathbb{P}_{s,x}$ ,

$$e^{\lambda t} F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t, X_t) = e^{\lambda s} F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(s, x) + \int_s^t e^{\lambda u} (L_{\theta} F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon} + \lambda F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon})(u, X_u) du + \int_s^t e^{\lambda u} \partial_x F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(u, X_u) dW_u.$$

Besides, by using inequalities (3.6.6), we can see that for all  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{-q\varepsilon} U_{\alpha}(x) \leq F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t, x) \leq e^{q\varepsilon} U_{\alpha}(x).$$

By using Lemma 3.6.2 there exist a random variable  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$ ,  $k, c, p > 0$  such that, for all  $\theta \in \Theta_{\gamma}$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$L_{\theta} F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t, x) \leq -\lambda F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t, x) + B_{\theta}, \quad \text{with } B_{\theta} \leq k \exp(cH_{\gamma}^p(\theta)).$$

Then it is not difficult to see by taking the expectation that, for all  $\theta \in \Theta_{\gamma}$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_{s,t}(\theta) U_{\alpha}(x) \leq e^{-\lambda(t-s)+2q\varepsilon} U_{\alpha}(x) + \lambda^{-1} e^{q\varepsilon} B_{\theta} \leq (\eta + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) U_{\alpha}(x) + B_{\theta}.$$

Therefore, it follows that for all  $\kappa > 0$ ,

$$P_{s,t}(\theta) U_{\alpha}(x) \leq (\eta + \kappa + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) U_{\alpha}(x) + B_{\theta} \mathbb{1}_{x \in \{U_{\alpha} \leq \kappa^{-1} B_{\theta}\}}$$

and this ends the proof, excepted for Lemma 3.6.2.  $\square$

**Proof of Proposition 3.6.5.** The proof follows the same lines as the proof of Proposition 3.6.4 and we only give the main ideas.

Once again, by using Ito's formula and Lemma 3.6.3, we can prove that there exist a random variable  $B : \Theta \rightarrow [0, \infty)$ ,  $k, c > 0$  and  $0 < p < 2$  such that, for all  $\theta \in \Theta_{\gamma}$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_{s,t}(\theta) G_{\alpha}(x) \leq (\eta + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) G_{\alpha}(x) + B_{\theta}, \quad \text{with } B_{\theta} \leq k \exp(cH_{\gamma}^p(\theta)).$$

Moreover, since  $G_{\alpha} \leq V_{\alpha}$  and

$$\mathbb{E}_{s,x}(\theta) [V_{\alpha}(X_t) \mathbb{1}_{\{V_{\alpha}(X_t) \geq 3\}}] = \mathbb{E}_{s,x}(\theta) [G_{\alpha}(X_t) \mathbb{1}_{\{V_{\alpha}(X_t) \geq 3\}}] \leq (\eta + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) G_{\alpha}(x) + B_{\theta},$$

we obtain that

$$P_{s,t}(\theta) V_{\alpha}(x) \leq (\eta + \mathbb{1}_{s \leq t \leq s+\tau}) V_{\alpha}(x) + (B_{\theta} + 3).$$

This is enough to complete the proof, excepted for Lemma 3.6.3.  $\square$



In order to simplify our claims, in the sequel we set

$$P_\theta := P_1(\theta), \quad P_\theta(z; dx) := P_\theta(0, z; 1, dx), \quad p_\theta(z, x) := p_\theta(0, z; 1, x), \quad T\theta := T_1\theta,$$

$$\bar{C} := C \times C, \quad \bar{U}_\alpha(x, y) := \frac{U_\alpha(x) + U_\alpha(y)}{2},$$

and, for all random function  $F : \Theta \rightarrow (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  and  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$F_{j,n}^+(\theta) := \max_{0 \leq n_1 < \dots < n_j \leq n-1} \prod_{k=1}^j F(e^{-r n_k} T^{n_k} \theta) \quad \text{and}$$

$$F_{j,n}^-(\theta) := \max_{1 \leq n_1 < \dots < n_j \leq n} \prod_{k=1}^j F(e^{-r(n-n_k)} T^{-n_k} \theta) = F_{j,n}^+(T^{-n}\theta). \quad (3.6.13)$$

### 3.6.3 Coupling method

In this section, we employ the results and terminology presented in [59], adapted to our situation. We said that  $C$  is a random  $(1, \varepsilon)$ -coupling set associated to the random probability measure  $\nu$  over  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$  on  $\mathbb{R}$ , if  $\varepsilon : \Theta \rightarrow (0, 1/2]$  is a measurable map,  $C_\theta$  is a compact set of  $\mathbb{R}$  for  $\mathcal{W}$ -almost surely  $\theta \in \Theta$  and

$$\inf_{z \in C_\theta} P_\theta(z; \star) \geq \varepsilon_\theta \nu_\theta(\star) \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.6.14)$$

Given a random  $(1, \varepsilon)$ -coupling set  $C$  associated to the random probability measure  $\nu$  over  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$  on  $\mathbb{R}$ , we construct a random Markov kernel  $P^*$  on  $\mathbb{R}^2$  as follows. Let  $\bar{R}$  and  $\bar{P}$  be two random Markov kernels on  $\mathbb{R}^2$  satisfying, for all  $\theta \in \Theta$ ,  $x, y \in C_\theta$  and  $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\bar{R}_\theta(x, y; A \times \mathbb{R}) := \frac{P_\theta(x; A) - \varepsilon_\theta \nu_\theta(A)}{1 - \varepsilon_\theta}, \quad \bar{R}_\theta(x, y; \mathbb{R} \times A) := \frac{P_\theta(x; A) - \varepsilon_\theta \nu_\theta(A)}{1 - \varepsilon_\theta}$$

and

$$\bar{P}_\theta(x, y; A \times B) := (1 - \varepsilon_\theta) \bar{R}_\theta(x, y; A \times B) + \varepsilon_\theta \nu_\theta(A \cap B). \quad (3.6.15)$$

We can assume that  $\bar{P}$  is a random coupling Markov kernel over  $P$ , in the sense that, for all  $\theta \in \Theta$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  and  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$\bar{P}_\theta(x, y; A \times \mathbb{R}) = P_\theta(x; A) \quad \text{and} \quad \bar{P}_\theta(x, y; \mathbb{R} \times A) = P_\theta(y; A). \quad (3.6.16)$$

Then define, for all  $\theta \in \Theta$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  and  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  by

$$P_\theta^*(x, y; B) := \begin{cases} \bar{R}_\theta(x, y; B), & \text{if } (x, y) \in \bar{C}_\theta, \\ \bar{P}_\theta(x, y; B), & \text{if } (x, y) \notin \bar{C}_\theta. \end{cases} \quad (3.6.17)$$

**Proposition 3.6.6.** *For all  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (0, 1/2)$  and  $\rho \in (0, \infty)$ , there exist  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$ , with  $\log(B) \in L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ , and a random  $(1, \varepsilon)$ -coupling set  $C$  over  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$  on  $\mathbb{R}$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$  and  $x, y \in \mathbb{R}$ ,*

$$P_\theta^* \bar{U}_\alpha(x, y) \leq \rho \bar{U}_\alpha(x, y) + B_\theta \mathbb{1}_{(x, y) \in \bar{C}_\theta} \quad \text{and} \quad \sup_{(x, y) \in \bar{C}_\theta} \bar{R}_\theta \bar{U}_\alpha(x, y) \leq \frac{\rho B_\theta}{1 - \varepsilon_\theta}. \quad (3.6.18)$$

Moreover, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  and  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_1$ ,

$$\begin{aligned} \|\nu_1 P_n(\theta) - \nu_2 P_n(\theta)\|_{U_\alpha} &\leq 2\rho^n \left[ (1 - \varepsilon)_{j,n}^+(\theta) + B_{j-1,n}^+(\theta) \right] \|\nu_1\|_{U_\alpha} \|\nu_2\|_{U_\alpha} \\ &\quad + 2(1 - \varepsilon)_{j,n}^+(\theta) \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k B \left( e^{-r(n-k-1)} T^{n-k-1} \theta \right). \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

**Proof.** Let  $\eta$  and  $\kappa$  be two positive constants such that  $\rho = \eta + 2\kappa$ . By using Proposition 3.6.4 we can see that there exists  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$  and  $k, c, p > 0$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,

$$P_\theta U_\alpha \leq (\eta + \kappa) U_\alpha + B_\theta \mathbb{1}_{\{U_\alpha \leq \kappa^{-1} B_\theta\}}, \quad \text{with } B_\theta \leq k \exp(cH_\gamma^p(\theta)).$$

Similar arguments as in the proof of [59, Proposition 11, p. 1660] applies and it is not difficult to see that, for all random coupling Markov kernel  $\bar{P}$  over  $P$  and  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,

$$\bar{P}_\theta \bar{U}_\alpha \leq \rho \bar{U}_\alpha + B_\theta \mathbb{1}_{\bar{C}_\theta}, \quad \text{with } C_\theta := \{U_\alpha \leq \kappa^{-1} B_\theta\}.$$

We can see by using (3.6.5) that  $\log(B) \in L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$  and we deduce that inequalities (3.6.18) are satisfied by setting  $B_\theta := ((\rho \kappa^{-1} B_\theta + B_\theta) \rho^{-1}) \vee B_\theta$ .

Moreover, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $C_\theta$  is a compact set and we deduce from the lower local Aronson estimate (3.2.8) that  $C$  is a random  $(1, \varepsilon)$ -coupling set associated to the random probability measure  $\nu$  defined, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$  and  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  by

$$\varepsilon_\theta := \left( \int_{\mathbb{R}} \inf_{z \in C_\theta} p_\theta(z, x) dx \right) \wedge \frac{1}{2} > 0 \quad \text{and} \quad \nu_\theta(A) := \frac{\int_A \inf_{z \in C_\theta} p_\theta(z, x) dx}{\int_{\mathbb{R}} \inf_{z \in C_\theta} p_\theta(z, x) dx}.$$

Furthermore, since relations (3.2.9) allow us to write for all  $\theta \in \Theta$  and all integer  $n \geq 0$ ,

$$P_n(\theta) = P(\theta) \dots P(e^{-r(n-1)} T^{n-1} \theta),$$

a direct application of [59, Theorem 8, p. 1656] gives (3.6.19) and this completes the proof.  $\square$

### 3.6.4 Ergodicity and key lemma

**Proposition 3.6.7.** *The dynamical system  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W}, (T_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is ergodic.*

**Proof.** Let us introduce three measurable maps  $U^\pm : \Theta \rightarrow \Theta$  and  $S_t : \Theta \rightarrow \Theta$  defined by

$$U^\pm(\theta) := \left( s \mapsto e^{-s/4} \theta(\pm e^{s/2}) \right) \quad \text{and} \quad S_t(\theta) := (s \mapsto \theta(s+t)).$$

It is classical that the distribution of  $U^\pm$  under the Wiener measure  $\mathcal{W}$ , denoted by  $\Gamma$ , is the distribution of the stationary Ornstein-Uhlenbeck process having the standard normal distribution as stationary distribution. This process is ergodic and as a consequence the dynamical system  $(\Theta, \mathcal{B}, \Gamma, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is ergodic (see for instance [7, Theorem 20.10]). Besides, it is a simple calculation to see that the following diagram is commutative,

$$\begin{array}{ccc}
 (\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W}) & \xrightarrow{U^\pm} & (\Theta, \mathcal{B}, \Gamma) \\
 \begin{array}{c} \downarrow T_t \\ \uparrow T_t^{-1} \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow S_t^{-1} \\ \downarrow S_t \end{array} \\
 (\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W}) & \xrightarrow{U^\pm} & (\Theta, \mathcal{B}, \Gamma)
 \end{array}$$

Let  $A \in \mathcal{B}$  be such that  $T_t^{-1}(A) = A$ , with  $t \neq 0$ . By using the commutativity of the previous diagram and the ergodicity of the dynamical system  $(\Theta, \mathcal{B}, \Gamma, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$ , it follows that

$$S_t^{-1}(U^\pm(A)) = U^\pm(T_t^{-1}(A)) = U^\pm(A) \quad \text{and} \quad \Gamma(U^\pm(A)) = 0 \quad \text{or} \quad = 1.$$

Moreover, we can see that

$$U^\pm(A) = (U^\pm)^{-1}(U^\pm(A)) \quad \text{and} \quad (U^+)^{-1}(U^+(A)) \cap (U^-)^{-1}(U^-(A)) = A.$$

We conclude that  $\mathcal{W}(A) = 0$  or  $= 1$  and the proof is finished.  $\square$

By using Proposition 3.6.6 and Proposition 3.6.7 we can state the following lemma, whose proof is postponed to Appendix.

**Lemma 3.6.8.** *Assume that  $r = 0$ . For all  $\alpha \in (0, 1)$  there exists  $\lambda > 0$  such that, for all families  $\{v_t^\pm : t \geq 0\}$  of random probability measure over  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$  on  $\mathbb{R}$  satisfying*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|v_t^\pm\|_{U_\alpha})}{t} = 0 \quad \mathcal{W}\text{-a.s.},$$

*the following forward and backward discrete-time convergences hold:*

1.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|v_t^+(\theta)P_{[t]}(\theta) - v_t^-(\theta)P_{[t]}(\theta)\|_{U_\alpha})}{t} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}; \quad (3.6.20)$$

2.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|v_t^+(\theta)P_{[t]}(T^{-[t]}\theta) - v_t^-(\theta)P_{[t]}(T^{-[t]}\theta)\|_{U_\alpha})}{t} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.6.21)$$

### 3.7 Proof of Theorem 3.2.4

Theorem 3.2.4 will be a consequence of Propositions 3.7.1 and 3.7.2.

#### 3.7.1 Exponential weak ergodicity and quasi-invariant measure

**Proposition 3.7.1.** *For all  $\alpha \in (0, 1)$  there exists  $\lambda > 0$  such that, for all  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_{1, U_\alpha}$ ,*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu_1 P_t(\theta) - \nu_2 P_t(\theta)\|_{U_\alpha})}{t} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.7.22)$$

Furthermore, there exists a unique (up to a  $\mathcal{W}$ -null set) random probability measure  $\mu$  over  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$  on  $\mathbb{R}$  such that, for all  $\alpha \in (0, 1)$ , there exists  $\lambda > 0$  such that, for all  $\nu \in \mathcal{M}_{1, U_\alpha}$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu P_t(T_{-t}\theta) - \mu_\theta\|_{U_\alpha})}{t} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.7.23)$$

Besides, for all  $t \geq 0$ ,

$$\mu_\theta \in \mathcal{M}_{1, U_\alpha} \quad \text{and} \quad \mu_\theta P_t(\theta) = \mu_{T_t\theta} \quad \mathcal{W}\text{-a.s.} \quad (3.7.24)$$

**Proof.** The cocycle property (3.2.9) allows us to write, for all  $\theta \in \Theta$  and  $t \geq 0$ ,

$$\|\nu_1 P_t(\theta) - \nu_2 P_t(\theta)\|_{U_\alpha} \leq \left( \sup_{0 \leq u \leq 1} \|P_u(T^{[t]}\theta)\|_{U_\alpha} \right) \|\nu_1 P_{[t]}(\theta) - \nu_2 P_{[t]}(\theta)\|_{U_\alpha}.$$

Moreover, by using Proposition 3.6.4, inequality (3.6.5) and the ergodic theorem, we get that

$$\log \left( \sup_{0 \leq u \leq 1} \|P_u\|_{U_\alpha} \right) \in L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W}) \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\sup_{0 \leq u \leq 1} \|P_u(T^n\theta)\|_{U_\alpha})}{n} = 0 \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}$$

Besides, a direct application of (3.6.20) in Lemma 3.6.8 gives that there exists  $\lambda > 0$ , independent of  $\nu_1$  and  $\nu_2$ , such that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu_1 P_n(\theta) - \nu_2 P_n(\theta)\|_{U_\alpha})}{n} \leq -\lambda \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}$$

Therefore we deduce inequality (3.7.22). Furthermore, one can see by using (3.6.21) in Lemma 3.6.8 and similar arguments that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\nu P_{n+1}(T^{-n-1}\theta) - \nu P_n(T^{-n}\theta)\|_{U_\alpha} < \infty \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}$$

We obtain that, for  $\mathscr{W}$ -almost  $\theta \in \Theta$ ,  $\{\nu P_n(T^{-n}\theta) : n \geq 0\}$  is a Cauchy sequence in the separable Banach space  $\mathcal{M}_{U_\alpha}$  and by using again (3.6.21) there exist  $\lambda > 0$  and a random probability measure  $\mu_\theta \in \mathcal{M}_{U_\alpha}$ , which both do not depend on  $\nu$ , such that

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\|\nu P_n(T^{-n}\theta) - \mu_\theta\|_{U_\alpha})}{n} \leq -\lambda \quad \mathscr{W}\text{-a.s.}$$

Then we get (3.7.23) in the same way as (3.7.22). Finally,

$$\mu_\theta P_t(\theta) \stackrel{\mathcal{M}_{U_\alpha}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \nu P_s(T_{-s}\theta) P_t(\theta) \stackrel{\mathcal{M}_{U_\alpha}}{=} \lim_{s \rightarrow \infty} \nu P_{t+s}(T_{-(s+t)}T_t\theta) \stackrel{\mathcal{M}_{U_\alpha}}{=} \mu_{T_t\theta} \quad \mathscr{W}\text{-a.s.}$$

and this completes the proof, excepted for Lemma 3.6.8.  $\square$

### 3.7.2 Annealed convergences

**Proposition 3.7.2.** *For all  $\alpha \in (0, 1)$  and  $\hat{\nu} \in \mathcal{M}_{1, V_\alpha}$ ,*

$$\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{1, V_\alpha} \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\nu} \hat{P}_t - \hat{\mu}\|_{V_\alpha} = 0. \quad (3.7.25)$$

**Proof.** Let  $\rho \in (0, 1)$  be and set  $L := \rho + 1$ . By applying Proposition 3.6.5 we can see that there exists  $B \in L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mathscr{W})$  such that, for all  $0 \leq u \leq 1$ ,

$$P_u(\theta)V_\alpha \leq LV_\alpha + B_\theta \quad \text{and} \quad P_\theta V_\alpha \leq \rho V_\alpha + B_\theta \quad \mathscr{W}\text{-a.s.} \quad (3.7.26)$$

We get from the latter inequality that  $\mu_{T_t\theta}(V_\alpha) \leq \rho \mu_\theta(V_\alpha) + B_\theta$  and by taking the expectation we obtain the left hand side of (3.7.25). Since the Wiener measure is  $(T_t)$ -invariant, we can write, denoting by  $\{t\}$  the fractional part of  $t$ ,

$$\|\hat{\nu} \hat{P}_t - \hat{\mu}\|_{V_\alpha} \leq \mathbb{E}_{\mathscr{W}} \left[ \|\hat{\nu} P_t(T^{-[t]}\theta) - \mu_{T_{\{t\}}\theta}\|_{V_\alpha} \right].$$

Then by using (3.7.23) in Proposition 3.7.1 and the cocycle property, we can see that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\nu} P_t(T^{-[t]}\theta) - \mu_{T_{\{t\}}\theta}\|_{V_\alpha} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \sup_{0 \leq u \leq 1} \|P_u(\theta)\|_{V_\alpha} \right) \|\hat{\nu} P_{[t]}(T^{-[t]}\theta) - \mu_\theta\|_{V_\alpha} = 0 \quad \mathscr{W}\text{-a.s.}$$

Besides, by using again (3.7.26) and the cocycle property (3.2.9), it is not difficult to see that

$$\|\nu P_t(T^{-[t]}\theta)\|_{V_\alpha} \leq L \left( \rho \|\nu\|_{V_\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k B(T^k\theta) \right) + B_\theta \quad \text{and} \quad \|\mu_{T_{\{t\}}\theta}\|_{V_\alpha} \leq L \|\mu_\theta\| + B_\theta.$$

Noting that the two previous bounds belong to  $L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mathscr{W})$  and are independent of  $t \geq 0$ , the dominate convergence theorem applies and we deduce the right hand side of (3.7.25). This ends the proof.  $\square$

### 3.8 Proof of Theorem 3.2.5

**Proof.** Recall that under  $\mathbb{P}_z(\theta)$  (see Proposition 3.4.1),  $\{S_\theta(t, X_t) : t \geq 0\}$  is a solution of the SDE (3.4.3). Moreover, since  $r > 0$  and by using (3.4.4), we can see that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_\theta(t, x) = S(x) := \int_0^x e^{\frac{y^2}{2}} dy, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} H_\theta(t, x) = S^{-1}(x) := \int_0^x e^{\frac{y^2}{2}} dy \quad (3.8.27)$$

and

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_\theta(t, x) = S' \circ S^{-1}(x) \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d_\theta(t, x) = 0, \quad (3.8.28)$$

uniformly on compact sets of  $\mathbb{R}$ . Following [3, Lemma 4.5] and denoting by  $\Gamma$  the standard normal distribution, it is not difficult to see that  $\{S_\theta(t, X_t) : t \geq 0\}$  is asymptotically time-homogeneous and  $S_*\Gamma$ -ergodic.

According to the cited Lemma, if in addition  $\{S_\theta(t, X_t) : t \geq 0\}$  is bounded in probability, we can deduce the convergence in distribution towards  $S_*\Gamma$ . That is

$$\left( \forall \varepsilon > 0, \exists R > 0, \sup_{t \geq 0} \mathbb{P}_z(\theta)(|S_\theta(t, X_t)| \geq R) \leq \varepsilon \right) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} S_\theta(t, X_t) \stackrel{(d)}{=} S_*\Gamma. \quad (3.8.29)$$

Then it is an easy matter to deduce Theorem 3.2.5. In fact, we shall prove that  $\{X_t : t \geq 0\}$  is bounded in probability for  $\mathscr{W}$ -a.s.  $\theta \in \Theta$ , which shall imply the boundedness in probability of  $\{S_\theta(t, X_t) : t \geq 0\}$  for  $\mathscr{W}$ -a.s.  $\theta \in \Theta$ .

To this end, by using Proposition 3.6.4, we can find  $\rho \in (0, 1)$ ,  $L > 0$ ,  $B : \Theta \rightarrow [1, \infty)$  and  $k, c, p > 0$  such that, for all  $0 \leq u \leq 1$ ,

$$P_u(\theta)U_\alpha \leq LU_\alpha + B_\theta, \quad P_\theta U_\alpha \leq \rho U_\alpha + B_\theta \quad \text{and} \quad B_\theta \leq k \exp[cH_\gamma^p(\theta)] \quad \mathscr{W}\text{-a.s.} \quad (3.8.30)$$

Then relations (3.2.7) and the ergodic theorem allow us to write that, for all  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|P_\theta(t, x, dy)\|_{U_\alpha} &\leq L \left( \rho^{[t]} U_\alpha(x) + k \sum_{m=0}^{[t]-1} \rho^{[t]-m} \exp[ce^{-rpm} H_\gamma^p(T^m \theta)] \right) + B_\theta \\ &\leq L \left( \rho U_\alpha(x) + \frac{k}{1-\rho} \exp \left[ \sup_{m \geq 0} (ce^{-rpm} H_\gamma^p(T^m \theta)) \right] \right) + B_\theta < \infty \quad \mathscr{W}\text{-a.s.} \end{aligned}$$

The Markov inequality implies that

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{P}_x(\theta)(|X_t| \geq R) \leq \frac{\sup_{t \geq 0} \|P_\theta(t, x, dy)\|_{U_\alpha}}{U_\alpha(R)} \quad \mathscr{W}\text{-a.s.}$$

and hence we obtain the fact that  $\{X_t : t \geq 0\}$  is bounded in probability for  $\mathscr{W}$ -a.s.  $\theta \in \Theta$ . Moreover, since

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \inf_{t \geq 0} S_\theta(t, x) = \infty$$

we deduce the boundedness in probability of  $\{S_\theta(t, X_t) : t \geq 0\}$  for  $\mathscr{W}$ -a.s.  $\theta \in \Theta$ . This completes the proof by applying [3, Lemma 4.5].  $\square$

## 3.9 Appendix

### 3.9.1 Proof of Lemma 3.6.2

**Step 1.** We shall prove that, for all  $0 < \delta < 1$  and  $R \geq 1$ , there exists  $\varepsilon_1 > 0$  such that, for all  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  and  $0 < \ell < 1$ , there exist  $R_1 : \Theta \rightarrow [R, \infty)$  and  $c_1 > 0$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $|x| \geq R_1(\theta)$ ,

$$L_{\theta,t}F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t,x) \leq -\delta\alpha(1-\alpha)x^2F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t,x), \quad \text{with } R_1(\theta) \leq c_1 \left( H_{\gamma}^{\frac{1}{\gamma(1-\ell)}}(\theta) + 1 \right). \quad (3.9.31)$$

By using chain rule (3.4.7) we obtain that

$$L_{\theta,t}F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t,x) = \left[ -\alpha(1-\alpha)x^2 - \alpha x e^{-rt} (T_t W_{\gamma,\varepsilon}(\theta))'(x) + \alpha \right] \\ \times \exp \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x) \right] x^2 U_{\alpha}(x),$$

which can be written

$$L_{\theta,t}F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t,x) = -\alpha(1-\alpha) \left[ 1 - \frac{1}{(1-\alpha)x^2} + \frac{e^{-rt} (T_t W_{\gamma,\varepsilon}(\theta))'(x)}{(1-\alpha)x} \right] \\ \times \exp \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x) \right] x^2 U_{\alpha}(x).$$

Moreover, one can see by using (3.6.6) that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $t \geq 0$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| (T_t W_{\gamma,\varepsilon}(\theta))'(x) \right| \leq \varphi_{\gamma}(t) D_{\gamma,\varepsilon}(\theta) L^{\frac{1}{\gamma}}(x), \quad \text{with } \varphi_{\gamma}(t) := (1+t/2)^{1/2\gamma} e^{t/4}.$$

Let us introduce  $q := 1 \vee e^{-rT}$  and  $\Psi(\varepsilon) := \exp[q\varepsilon]$  and note that we can choose  $\varepsilon_1 > 0$  and  $D \geq R$  such that

$$\left( 1 - \frac{1}{(1-\alpha)D^2} - \frac{q}{(1-\alpha)D} \right) \Psi^{-2}(\varepsilon_1) \geq \delta$$

We deduce the left hand side of (3.9.31) by setting, for all  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  and  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,

$$R_1(\theta) := (\varphi_{\gamma}(T) D_{\gamma,\varepsilon}(\theta) c_{\gamma,\ell} \vee 1)^{\frac{1}{1-\ell}} D^{\frac{1}{1-\ell}}, \quad \text{with } c_{\gamma,\ell} := \sup_{|x| \geq 1} \frac{L^{\frac{1}{\gamma}}(x)}{|x|^{\ell}} < \infty. \quad (3.9.32)$$

We get the right hand side by using the left hand side of (3.6.6) and by choosing  $c_1$  sufficiently large.

**Step 2.** We shall prove that, for all  $0 < \delta < 1$  and  $R \geq 1$ , there exists  $\varepsilon_2 > 0$  such that, for all  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , there exists a constant  $R_2 \geq R$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $|x| \geq R$ ,

$$\partial_t F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t,x) \leq (1-\delta) \frac{\alpha}{2} x^2 F_{\theta}^{\gamma,\varepsilon}(t,x). \quad (3.9.33)$$



By using chain rule (3.4.8) we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) &= \frac{\alpha}{2} x^2 \exp [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)] U_\alpha(x) - (F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) - 1) \\ &\quad - \left( \frac{1}{4} + r \right) \int_0^x [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(y)] \exp [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)] U'_\alpha(y) dy \\ &\quad - \int_0^x \left( \frac{\alpha y^2}{2} \right) \times \left( \exp [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)] U'_\alpha(y) \right) dy. \end{aligned}$$

Then by integration by parts we get

$$\begin{aligned} \partial_t F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) &= \frac{\alpha}{2} x^2 \exp [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)] U_\alpha(x) - (F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) - 1) \\ &\quad - \left( \frac{1}{4} + r \right) \int_0^x [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(y)] \exp [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)] U'_\alpha(y) dy \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} x^2 F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) + \int_0^x F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, y) \alpha y dy. \end{aligned}$$

We can see that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \int_0^x [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(y)] \exp [e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma, \varepsilon}(\theta)(x)] U'_\alpha(y) dy \right| \leq q \varepsilon \Psi^2(\varepsilon) F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x)$$

and

$$\left| \int_0^x F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, y) \alpha y dy \right| \leq \Psi^2(\varepsilon) F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x).$$

Therefore, by setting  $\kappa := |r| + (1/4)$ , we get

$$\partial_t F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x) \leq \left( [\Psi^2(\varepsilon) - 1] \frac{\alpha}{2} x^2 + [1 + \kappa q \varepsilon] \Psi^2(\varepsilon) \right) F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x).$$

We deduce (3.9.33) by taking  $\varepsilon_2 > 0$  and  $R_2 \geq R$  such that, for all  $x \geq R_2$ ,

$$[\Psi^2(\varepsilon_2) - 1] \frac{\alpha}{2} x^2 + [1 + q \kappa \varepsilon_2] \Psi^2(\varepsilon_2) \leq (1 - \delta) \frac{\alpha}{2} x^2.$$

**Step 3.** Lemma 3.6.2 is a direct consequence of inequalities (3.9.33) and (3.9.31). Indeed, choose  $0 < \delta < 1$  and  $R \geq 1$  such that

$$\left( \delta \alpha (1 - \alpha) - (1 - \delta) \frac{\alpha}{2} \right) > 0 \quad \text{and} \quad \left( \delta \alpha (1 - \alpha) - (1 - \delta) \frac{\alpha}{2} \right) R^2 \geq \lambda.$$

Set  $\bar{\varepsilon} := \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$  and, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$  and  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ ,

$$B_\theta := \sup_{|x| \leq R_1(\theta) \vee R_2, 0 \leq t \leq T} L_\theta F_\theta^{\gamma, \varepsilon}(t, x).$$

It is clear that the left hand side of (3.6.9) is satisfied, whereas the right hand side is obtained by taking  $p := 2/(\gamma(1 - \ell))$  and  $k, c$  sufficiently large.  $\square$

### 3.9.2 Proof of Lemma 3.6.3

This proof uses similar ideas as the proof of Lemma 3.6.2 and we only give the main lines.

**Step 1.** We prove that, for all  $0 < \delta < 1$ ,  $R \geq 1$  and  $0 < \ell < 1$ , there exist  $R_1 : \Theta \rightarrow [R, \infty)$  and  $c_1 > 0$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $|x| \geq R_1(\theta)$ ,

$$L_{\theta,t} G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x) \leq -\alpha(1-\delta)|x|^\alpha G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x), \quad \text{with } R_1(\theta) \leq c_1 \left( H_\gamma^{\frac{1}{\gamma(1-\ell)}}(\theta) + 1 \right). \quad (3.9.34)$$

By using chain rule (3.4.7) we can see that for all  $x \in \{V_\alpha > 3\}$ ,

$$L_{\theta,t} G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x) = -\alpha \left[ 1 + \frac{e^{-rt} (T_t W_{\gamma,\varepsilon}(\theta))'(x)}{x} - \frac{\alpha}{|x|^{2-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{x^2} \right] \times \exp \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x) \right] |x|^\alpha G_\alpha(x).$$

We can choose  $D \geq 1$  such that  $\{V_\alpha \leq 3\} \subset [-D, D]$  and

$$\left( 1 - \frac{q}{D} - \frac{\alpha}{D^{2-\alpha}} \right) \Psi^{-2}(\varepsilon) \geq (1-\delta).$$

Then we define  $R_1$  as in (3.9.32) and we deduce (3.9.34).

**Step 2.** We prove that, for all  $\delta > 0$  and  $R \geq 1$ , there exists a constants  $R_2 \geq R$  such that, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $0 \leq t \leq T$  and  $|x| \geq R_2$ ,

$$\partial_t G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x) \leq \left( \frac{\alpha}{2} + \delta \right) |x|^\alpha G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x). \quad (3.9.35)$$

By using chain rule (3.4.8) we can see that for all  $x \in \{V_\alpha > 3\}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x) &= \frac{\alpha}{2} |x|^\alpha \exp \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(x) \right] V_\alpha(x) - (G_\theta^{\gamma,\varepsilon}(t,x) - 1) \\ &\quad - \left( \frac{1}{4} + r \right) \int_0^x \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(y) \right] \exp \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(y) \right] G'_\alpha(y) dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^x \exp \left[ e^{-rt} T_t \Delta_{\gamma,\varepsilon}(\theta)(y) \right] y G''_\alpha(y) dy. \end{aligned}$$

It is then not difficult to deduce (3.9.35) by using similar methods as in the proof of Lemma 3.6.2.

**Step 3.** We deduce Lemma 3.6.3 from (3.9.35) and (3.9.34). The only variation is that we need to choose  $0 < \ell < 1$  such that  $p := \alpha/(\gamma(1-\ell)) < 2$ .  $\square$

### 3.9.3 Proof of Lemma 3.6.8

We need the following result which is a simple consequence of the ergodicity of the underlying dynamical system (3.6.7).

**Lemma 3.9.1.** *Assume that  $r = 0$  and let  $F$  as in (3.6.13) such that  $(\log(F) \vee 0) \in L^1(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W})$ .*

1. *If  $\mathcal{W}(F < 1) = 1$  then, for all  $L \geq 1$ , there exists  $\lambda > 0$  such that*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} e^{\lambda n} F_{\lfloor \frac{n}{L} \rfloor, n}^{\pm}(\theta) = 0 \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}$$

2. *If  $\mathcal{W}(F \geq 1) > 0$  then, for all  $\eta > 0$ , there exists  $L > 0$  such that*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} e^{-\eta n} F_{\lfloor \frac{n}{L} \rfloor, n}^{\pm}(\theta) = 0 \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}$$

We only prove (3.6.20) in Lemma (3.6.8) since the proof of (3.6.21) follows the same lines, replacing  $T$  by  $T^{-1}$ . By using Proposition 3.6.6 we can write, for all  $\theta \in \Theta_\gamma$ ,  $t \geq 0$  and  $j \in \{0, \dots, [t] + 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_t^+ P_{[t]}(T^{-[t]}\theta) - \mathbf{v}_t^- P_{[t]}(T^{-[t]}\theta)\|_{U_\alpha} &\leq 2\rho^{[t]} \left[ (1 - \varepsilon)_{j, [t]}^-(\theta) + B_{j-1, [t]}^-(\theta) \right] \|\mathbf{v}_t^+\|_{U_\alpha} \|\mathbf{v}_t^-\|_{U_\alpha} \\ &\quad + 2(1 - \varepsilon)_{j, [t]}^-(\theta) \sum_{k=0}^{[t]-1} \rho^k B(T^{n-k-1}\theta). \end{aligned}$$

Moreover, the ergodic theorem allows us to see that, for all  $\eta > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log [B(T^{-k+1}\theta)]}{k} = 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} e^{-\eta n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k B(T^{-k+1}\theta) \right) = 0 \quad \mathcal{W}\text{-a.s.}$$

and by using Lemma 3.9.1, we can see that there exist  $L \geq 1$  and  $\ell > 0$  such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\eta n} B_{\lfloor \frac{n}{L} \rfloor, n}^-(\theta) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ell n} (1 - \varepsilon)_{\lfloor \frac{n}{L} \rfloor, n}^-(\theta) = 0.$$

Therefore we deduce (3.6.20) and this ends the proof.

**Proof of Lemma 3.9.1.** We prove the lemma only for  $F^+$ , since the proof for  $F^-$  is exactly the same, replacing  $T$  by  $T^{-1}$ . We set, for all  $\theta \in \Theta$ ,  $c \geq 0$  and  $k \geq 1$ ,

$$\log [F_k^{(c)}(\theta)] := \log [F(T^{k-1}(\theta))] \mathbb{1}_{\{F(T^{k-1}\theta) \geq c\}} \quad \text{and} \quad F^{(c)} := F_1^{(c)}.$$

Assume that  $\mathcal{W}(F < 1) = 1$ . We can see that there exist  $0 < c < 1$  and  $\ell > 0$  such that

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}} [\mathbb{1}_{F \geq c}] < L^{-1} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\mathcal{W}} [\log (F^{(c)})] < -\ell.$$

By applying the ergodic theorem to the dynamical system  $(\Theta, \mathcal{B}, \mathcal{W}, T)$  we obtain that, for  $\mathcal{W}$ -almost surely  $\theta \in \Theta$  and all integer  $n$  sufficiently large,

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{F(T^{k-1}\theta) \geq c\}} \leq \left\lceil \frac{n}{L} \right\rceil \quad \text{and} \quad F_{\left\lceil \frac{n}{L} \right\rceil, n}^+(\theta) \leq \prod_{k=1}^n F_k^{(c)}(\theta) \leq e^{-\ell n}.$$

We deduce the first point of the lemma by taking  $0 < \lambda < \ell$ . Furthermore, assume that  $\mathcal{W}(F \geq 1) > 0$ . Note that if  $F$  is bounded  $\mathcal{W}$ -a.s. the second point of the lemma is obvious. Moreover, when  $F$  is unbounded with positive probability, it is not difficult to see that there exist  $0 < \kappa < \eta$ ,  $c \geq 1$  and  $L \geq 1$  such that

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}[\log(F^{(c)})] < \kappa \quad \text{and} \quad \mathbb{E}_{\mathcal{W}}[\mathbb{1}_{F \geq c}] > L^{-1}.$$

Once again, the ergodic theorem allow us to obtain the second point of the lemma since, for  $\mathcal{W}$ -almost surely  $\theta \in \Theta$  and all integer  $n$  sufficiently large,

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{F(T^{k-1}\theta) \geq c\}} \geq \left\lfloor \frac{n}{L} \right\rfloor \quad \text{and} \quad F_{\left\lfloor \frac{n}{L} \right\rfloor, n}^+(\theta) \leq \prod_{k=1}^n F_k^{(c)}(\theta) \leq e^{\kappa n}.$$

□

□

# Bibliographie

- [1] Mikhail Menshikov and Stanislav Volkov. Urn-related random walk with drift  $\rho x^\alpha/t^\beta$ . *Electron. J. Probab.*, 13 :no. 31, 944–960, 2008. [3](#), [4](#), [5](#), [11](#), [16](#), [19](#), [20](#), [59](#), [60](#), [61](#), [75](#), [76](#), [79](#), [84](#)
- [2] David A. Freedman. Bernard Friedman’s urn. *Ann. Math. Statist*, 36 :956–970, 1965. [4](#), [11](#), [59](#), [60](#), [75](#), [76](#)
- [3] Mihai Gradinaru and Yoann Offret. Existence and asymptotic behaviour of some time-inhomogeneous diffusions. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 2011. [5](#), [20](#), [43](#), [96](#), [97](#), [104](#), [105](#), [106](#), [123](#)
- [4] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999. [5](#), [6](#), [67](#), [68](#), [78](#)
- [5] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. [7](#)
- [6] Alexander S. Cherny and Hans-Jürgen Engelbert. *Singular stochastic differential equations*, volume 1858 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. [7](#), [19](#), [59](#), [67](#), [68](#), [71](#)
- [7] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002. [7](#), [59](#), [74](#), [76](#), [83](#), [87](#), [119](#)
- [8] Minoru Motoo. Proof of the law of iterated logarithm through diffusion equation. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 10 :21–28, 1958. [7](#), [76](#)
- [9] Kiyosi Itô and Henry P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125. [8](#), [21](#)
- [10] Ī. Ī. Gihman and A. V. Skorohod. *Stochastic differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the Russian by Kenneth Wickwire, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 72. [8](#), [58](#), [61](#)
- [11] R. Mansuy. On a one-parameter generalization of the Brownian bridge and associated quadratic functionals. *J. Theoret. Probab.*, 17(4) :1021–1029, 2004. [12](#), [66](#), [71](#)
- [12] Terence Chan and David Williams. An “excursion” approach to an annealing problem. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 105(1) :169–176, 1989. [17](#)

- [13] John A. D. Appleby and Dana Mackey. Polynomial asymptotic stability of damped stochastic differential equations. In *Proceedings of the 7th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations*, volume 7 of *Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ.*, pages No. 2, 33 pp. (electronic). *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, Szeged, 2004. [17](#), [58](#), [60](#)
- [14] H. Kesten, M. V. Kozlov, and F. Spitzer. A limit law for random walk in a random environment. *Compositio Math.*, 30 :145–168, 1975. [20](#), [96](#)
- [15] Ya. G. Sinai. The limit behavior of a one-dimensional random walk in a random environment. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 27(2) :247–258, 1982. [20](#), [96](#)
- [16] Fred Solomon. Random walks in a random environment. *Ann. Probability*, 3 :1–31, 1975. [20](#)
- [17] A. O. Golosov. Localization of random walks in one-dimensional random environments. *Comm. Math. Phys.*, 92(4) :491–506, 1984. [20](#), [22](#)
- [18] Harry Kesten. The limit distribution of Sinai's random walk in random environment. *Phys. A*, 138(1-2) :299–309, 1986. [20](#), [22](#)
- [19] Scott Schumacher. Diffusions with random coefficients. In *Particle systems, random media and large deviations (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 41 of *Contemp. Math.*, pages 351–356. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985. [20](#), [96](#)
- [20] Th. Brox. A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. *Ann. Probab.*, 14(4) :1206–1218, 1986. [20](#), [96](#), [101](#), [106](#)
- [21] Kiyoshi Kawazu, Yozo Tamura, and Hiroshi Tanaka. Limit theorems for one-dimensional diffusions and random walks in random environments. *Probab. Theory Related Fields*, 80(4) :501–541, 1989. [20](#), [96](#)
- [22] Hiroshi Tanaka. Limit theorem for one-dimensional diffusion process in Brownian environment. In *Stochastic analysis (Paris, 1987)*, volume 1322 of *Lecture Notes in Math.*, pages 156–172. Springer, Berlin, 1988. [20](#)
- [23] Scott Schumacher. *DIFFUSIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS (ENVIRONMENT)*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984. Thesis (Ph.D.)—University of California, Los Angeles. [20](#)
- [24] H. Tanaka. Limit distributions for one-dimensional diffusion processes in self-similar random environments. In *Hydrodynamic behavior and interacting particle systems (Minneapolis, Minn., 1986)*, volume 9 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 189–210. Springer, New York, 1987. [20](#)
- [25] H. Tanaka. Limit distribution for 1-dimensional diffusion in a reflected Brownian medium. In *Séminaire de Probabilités, XXI*, volume 1247 of *Lecture Notes in Math.*, pages 246–261. Springer, Berlin, 1987. [20](#)
- [26] Pierre Mathieu. Zero white noise limit through Dirichlet forms, with application to diffusions in a random medium. *Probab. Theory Related Fields*, 99(4) :549–580, 1994. [20](#), [49](#), [96](#)

- [27] Yueyun Hu and Zhan Shi. The limits of Sinai's simple random walk in random environment. *Ann. Probab.*, 26(4) :1477–1521, 1998. [20](#), [49](#), [96](#)
- [28] Yueyun Hu, Zhan Shi, and Marc Yor. Rates of convergence of diffusions with drifted Brownian potentials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(10) :3915–3934, 1999. [20](#), [96](#)
- [29] Zhan Shi. Sinai's walk via stochastic calculus. In *Milieux aléatoires*, volume 12 of *Panor. Synthèses*, pages 53–74. Soc. Math. France, Paris, 2001. [20](#), [96](#)
- [30] Tom Schmitz. Diffusions in random environment and ballistic behavior. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 42(6) :683–714, 2006. [20](#), [96](#), [106](#)
- [31] Alain-Sol Sznitman and Ofer Zeitouni. An invariance principle for isotropic diffusions in random environment. *Invent. Math.*, 164(3) :455–567, 2006. [20](#), [96](#), [106](#)
- [32] Dimitrios Cheliotis. One-dimensional diffusion in an asymmetric random environment. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 42(6) :715–726, 2006. [20](#), [21](#), [49](#), [96](#)
- [33] Roland Diel. Almost sure asymptotics for the local time of a diffusion in Brownian environment. *Stochastic Process. Appl.*, 121(10) :2303–2330, 2011. [20](#), [96](#)
- [34] Ofer Zeitouni. Random walks in random environments. *J. Phys. A*, 39(40) :R433–R464, 2006. [20](#), [96](#)
- [35] Alain-Sol Sznitman. Topics in random walks in random environment. In *School and Conference on Probability Theory*, ICTP Lect. Notes, XVII, pages 203–266 (electronic). Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004. [20](#)
- [36] Ofer Zeitouni. Random walks in random environment. In *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1837 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–312. Springer, Berlin, 2004. [20](#)
- [37] C. Boldrighini, I. A. Ignatyuk, V. A. Malyshev, and A. Pellegrinotti. Random walk in dynamic environment with mutual influence. *Stochastic Process. Appl.*, 41(1) :157–177, 1992. [20](#), [96](#)
- [38] C. Boldrighini, R. A. Minlos, and A. Pellegrinotti. Random walks in quenched i.i.d. space-time random environment are always a.s. diffusive. *Probab. Theory Related Fields*, 129(1) :133–156, 2004. [20](#), [96](#), [106](#)
- [39] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. An almost sure invariance principle for random walks in a space-time random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 133(3) :299–314, 2005. [20](#), [96](#), [106](#)
- [40] C. Boldrighini, R. A. Minlos, and A. Pellegrinotti. Almost-sure central limit theorem for directed polymers and random corrections. *Comm. Math. Phys.*, 189(2) :533–557, 1997. [20](#)
- [41] Antar Bandyopadhyay and Ofer Zeitouni. Random walk in dynamic Markovian random environment. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 1 :205–224, 2006. [20](#), [96](#)
- [42] Dmitry Dolgopyat and Carlangelo Liverani. Non-perturbative approach to random walk in Markovian environment. *Electron. Commun. Probab.*, 14 :245–251, 2009. [20](#), [96](#)

- [43] Dmitry Dolgopyat, Gerhard Keller, and Carlangelo Liverani. Random walk in Markovian environment. *Ann. Probab.*, 36(5) :1676–1710, 2008. [20](#), [96](#)
- [44] Jean Bricmont and Antti Kupiainen. Random walks in space time mixing environments. *J. Stat. Phys.*, 134(5-6) :979–1004, 2009. [20](#), [96](#)
- [45] L. Avena, F. den Hollander, and F. Redig. Law of large numbers for a class of random walks in dynamic random environments. *Electron. J. Probab.*, 16 :no. 21, 587–617, 2011. [20](#), [96](#)
- [46] Tomasz Komorowski and Stefano Olla. On homogenization of time-dependent random flows. *Probab. Theory Related Fields*, 121(1) :98–116, 2001. [20](#), [96](#), [100](#), [106](#)
- [47] Rémi Rhodes. On homogenization of space-time dependent and degenerate random flows. *Stochastic Process. Appl.*, 117(10) :1561–1585, 2007. [20](#), [96](#), [106](#)
- [48] Rémi Rhodes. On homogenization of space-time dependent and degenerate random flows. II. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(4) :673–692, 2008. [20](#)
- [49] Philippe Carmona. The mean velocity of a Brownian motion in a random Lévy potential. *Ann. Probab.*, 25(4) :1774–1788, 1997. [21](#)
- [50] Arvind Singh. Rates of convergence of a transient diffusion in a spectrally negative Lévy potential. *Ann. Probab.*, 36(1) :279–318, 2008. [21](#), [49](#)
- [51] Hiroshi Tanaka. Lévy processes conditioned to stay positive and diffusions in random environments. In *Stochastic analysis on large scale interacting systems*, volume 39 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 355–376. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004. [21](#), [49](#)
- [52] Roland Diel and Guillaume Voisin. Local time of a diffusion in a stable Lévy environment. *Stochastics*, 83(2) :127–152, 2011. [21](#)
- [53] Ludwig Arnold. *Random dynamical systems*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998. [44](#), [102](#)
- [54] V. I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 19 :179–210, 1968. [44](#), [103](#)
- [55] Yves Guivarc’h and Albert Raugi. Propriétés de contraction d’un semi-groupe de matrices inversibles. Coefficients de Liapunoff d’un produit de matrices aléatoires indépendantes. *Israel J. Math.*, 65(2) :165–196, 1989. [44](#), [103](#)
- [56] Zeng Lian and Kening Lu. Lyapunov exponents and invariant manifolds for random dynamical systems in a Banach space. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 206(967) :vi+106, 2010. [44](#), [103](#)
- [57] Ludwig Arnold, Volker Matthias Gundlach, and Lloyd Demetrius. Evolutionary formalism for products of positive random matrices. *Ann. Appl. Probab.*, 4(3) :859–901, 1994. [44](#), [103](#)
- [58] Yuri Kifer. Perron-Frobenius theorem, large deviations, and random perturbations in random environments. *Math. Z.*, 222(4) :677–698, 1996. [44](#), [103](#)



- [59] R. Douc, E. Moulines, and Jeffrey S. Rosenthal. Quantitative bounds on convergence of time-inhomogeneous Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 14(4) :1643–1665, 2004. [44](#), [102](#), [104](#), [117](#), [118](#)
- [60] H.-J. Engelbert and V. P. Kurenok. On one-dimensional stochastic equations driven by symmetric stable processes. In *Stochastic processes and related topics (Siegmondsburg, 2000)*, volume 12 of *Stochastics Monogr.*, pages 81–109. Taylor & Francis, London, 2002. [46](#)
- [61] V. P. Kurenok. On driftless one-dimensional SDE’s with respect to stable Levy processes. *Liet. Mat. Rink.*, 47(4) :517–531, 2007. [46](#)
- [62] V. P. Kurenok. Stochastic equations with time-dependent drift driven by Levy processes. *J. Theoret. Probab.*, 20(4) :859–869, 2007. [46](#)
- [63] Hiroki Masuda. On multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes driven by a general Lévy process. *Bernoulli*, 10(1) :97–120, 2004. [46](#)
- [64] Jian Wang. Criteria for ergodicity of Lévy type operators in dimension one. *Stochastic Process. Appl.*, 118(10) :1909–1928, 2008. [46](#)
- [65] David Applebaum and Michailina Siakalli. Asymptotic stability of stochastic differential equations driven by Lévy noise. *J. Appl. Probab.*, 46(4) :1116–1129, 2009. [46](#)
- [66] Ilya Pavlyukevich. Simulated annealing for Lévy-driven jump-diffusions. *Stochastic Process. Appl.*, 118(6) :1071–1105, 2008. [46](#)
- [67] Michel Benaïm. Vertex-reinforced random walks and a conjecture of Pemantle. *Ann. Probab.*, 25(1) :361–392, 1997. [47](#)
- [68] Robin Pemantle and Stanislav Volkov. Vertex-reinforced random walk on  $\mathbf{Z}$  has finite range. *Ann. Probab.*, 27(3) :1368–1388, 1999. [47](#)
- [69] M. Cranston and Y. Le Jan. Self-attracting diffusions : two case studies. *Math. Ann.*, 303(1) :87–93, 1995. [47](#)
- [70] Olivier Raimond. Self-attracting diffusions : case of the constant interaction. *Probab. Theory Related Fields*, 107(2) :177–196, 1997. [47](#)
- [71] Michel Benaïm, Michel Ledoux, and Olivier Raimond. Self-interacting diffusions. *Probab. Theory Related Fields*, 122(1) :1–41, 2002. [47](#)
- [72] Aline Kurtzmann. The ODE method for some self-interacting diffusions on  $\mathbb{R}^d$ . *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(3) :618–643, 2010. [47](#)
- [73] Samuel Herrmann and Michael Scheutzow. Rate of convergence of some self-attracting diffusions. *Stochastic Process. Appl.*, 111(1) :41–55, 2004. [47](#)
- [74] Sebastien Chambeu and Aline Kurtzmann. Convergence in distribution of some particular self-interacting diffusions : the simulated annealing method. *Preprint*, 2008. [47](#)
- [75] Olivier Raimond. Self-interacting diffusions : a simulated annealing version. *Probab. Theory Related Fields*, 144(1-2) :247–279, 2009. [47](#)
- [76] Victor Kleptsyn and Aline Kurtzmann. Ergodicity of self-attracting motion. *Preprint*, 2010. [47](#)

- [77] Sebastien Chambeu and Aline Kurtzmann. Some particular self-interacting diffusions : ergodic behaviour and almost sure convergence. *Bernoulli*, 17(4) :1248–1267, 2010. [47](#)
- [78] A. F. Ivanov, Y. I. Kazmerchuk, and A. V. Swishchuk. Theory, stochastic stability and applications of stochastic delay differential equations : a survey of results. *Differential Equations Dynam. Systems*, 11(1-2) :55–115, 2003. [47](#)
- [79] Pierre Andrieu and Roland Del. Limit law of the local time for brox’s diffusion. *Preprint*, 2010. [48](#)
- [80] Roland Del. Almost sure asymptotics for the maximum local time in brownian environment. *Preprint*, 2010. [48](#)
- [81] Philippe Carmona. The mean velocity of a Brownian motion in a random Lévy potential. *Ann. Probab.*, 25(4) :1774–1788, 1997. [49](#)
- [82] Pierre Mathieu. Limit theorems for diffusions with a random potential. *Stochastic Process. Appl.*, 60(1) :103–111, 1995. [49](#)
- [83] Wilhelm Stannat. The theory of generalized Dirichlet forms and its applications in analysis and stochastics. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 142(678) :viii+101, 1999. [49](#)
- [84] Daehong Kim and Yoichi Oshima. Some inequalities related to transience and recurrence of Markov processes and their applications. *J. Theoret. Probab.*, 23(1) :148–168, 2010. [49](#)
- [85] John A. D. Appleby and Huizhong Wu. Solutions of stochastic differential equations obeying the law of the iterated logarithm, with applications to financial markets. *Electron. J. Probab.*, 14 :912–959, 2009. [58](#), [78](#)
- [86] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989. [59](#), [76](#), [78](#), [80](#), [81](#)
- [87] R. N. Bhattacharya and S. Ramasubramanian. Recurrence and ergodicity of diffusions. *J. Multivariate Anal.*, 12(1) :95–122, 1982. [59](#)
- [88] R. Z. Has'minskiĭ. *Stochastic stability of differential equations*, volume 7 of *Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids : Mechanics and Analysis*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980. Translated from the Russian by D. Louvish. [59](#)
- [89] Kiyomasa Narita. Remarks on non-explosion theorem for stochastic differential equations. *Kodai Math. J.*, 5(3) :395–401, 1982. [59](#)
- [90] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Reprint of the 1997 edition. [59](#), [71](#), [72](#), [73](#), [91](#), [108](#), [110](#), [112](#)
- [91] Mihai Gradinaru, Bernard Roynette, Pierre Vallois, and Marc Yor. Abel transform and integrals of Bessel local times. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 35(4) :531–572, 1999. [70](#)
- [92] Lester E. Dubins and David A. Freedman. A sharper form of the Borel-Cantelli lemma and the strong law. *Ann. Math. Statist.*, 36 :800–807, 1965. [87](#)

- [93] Amir Dembo, Nina Gantert, Yuval Peres, and Zhan Shi. Valleys and the maximum local time for random walk in random environment. *Probab. Theory Related Fields*, 137(3-4):443–473, 2007. [96](#)
- [94] Francesco Russo and Gerald Trutnau. Some parabolic PDEs whose drift is an irregular random noise in space. *Ann. Probab.*, 35(6):2213–2262, 2007. [100](#), [101](#)
- [95] Franco Flandoli, Francesco Russo, and Jochen Wolf. Some SDEs with distributional drift. I. General calculus. *Osaka J. Math.*, 40(2):493–542, 2003. [100](#), [101](#)
- [96] Robert Cogburn. On direct convergence and periodicity for transition probabilities of Markov chains in random environments. *Ann. Probab.*, 18(2):642–654, 1990. [104](#)
- [97] Steven Orey. Markov chains with stochastically stationary transition probabilities. *Ann. Probab.*, 19(3):907–928, 1991. [104](#)
- [98] S. P. Meyn and R. L. Tweedie. *Markov chains and stochastic stability*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London Ltd., London, 1993. [104](#)
- [99] N. V. Krylov. *Controlled diffusion processes*, volume 14 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Translated from the 1977 Russian original by A. B. Aries, Reprint of the 1980 edition. [108](#)
- [100] K. David Elworthy, Aubrey Truman, and Huaizhong Zhao. Generalized Itô formulae and space-time Lebesgue-Stieltjes integrals of local times. In *Séminaire de Probabilités XL*, volume 1899 of *Lecture Notes in Math.*, pages 117–136. Springer, Berlin, 2007. [108](#)
- [101] D. G. Aronson. Non-negative solutions of linear parabolic equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 22:607–694, 1968. [112](#)
- [102] Daniel W. Stroock. Diffusion semigroups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators. In *Séminaire de Probabilités, XXII*, volume 1321 of *Lecture Notes in Math.*, pages 316–347. Springer, Berlin, 1988. [112](#)
- [103] X. Fernique. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, IV-1974*, pages 1–96. Lecture Notes in Math., Vol. 480. Springer, Berlin, 1975. [114](#)



# Table des figures

1.1	Comportements heuristiques . . . . .	2
1.2	Transition de phase : Menshikov et Volkov . . . . .	3
1.3	Transition de phase : cas répulsif . . . . .	11
1.4	Temps de survie : lignes de niveau . . . . .	14
1.5	Temps de survie : plans de coupe . . . . .	15
1.6	Transition de phase : cas attractif . . . . .	16
1.7	Vallées du potentiel brownien $\theta$ . . . . .	22
1.8	Localisation de la diffusion de Brox dans un milieu donné . . . . .	23
1.9	Fluctuations du potentiel $V_\theta(t, \star)$ . . . . .	26
1.10	Convergence vers une loi normale centrée réduite . . . . .	30
1.11	Évolution de la mesure invariante $\mu_{T_t\theta}$ (1) . . . . .	32
1.12	Mesures invariantes (1) . . . . .	33
1.13	Évolution de la mesure invariante $\mu_{T_t\theta}$ (2) . . . . .	34
1.14	Mesures invariantes (2) . . . . .	35
1.15	Phénomène de déphasage (1) . . . . .	37
1.16	Phénomène de déphasage (2) . . . . .	38
1.17	TCL : cas sur-critique . . . . .	40
1.18	Diffusion de Brox inhomogène : cas critique . . . . .	41
1.19	TCL : cas critique . . . . .	42
1.20	Diffusion de Brox inhomogène : cas sous-critique (faible) . . . . .	50
1.21	Comparaison entre la conjecture 1.5.1 et le TCL classique . . . . .	51
1.22	Diffusion de Brox inhomogène : cas sous-critique (fort) (1) . . . . .	52
1.23	Diffusion de Brox inhomogène : cas sous-critique (fort) (2) . . . . .	53
2.1	Phase transition in the attractive case . . . . .	60
2.2	Phase transition in the repulsive case . . . . .	61
2.3	The increasing sequence of stopping times . . . . .	86
3.1	Realization of the random potential freezed at time $t$ . . . . .	99
3.2	Affine approximation of a typical Brownian path $\theta$ . . . . .	113











## RÉSUMÉ

Nous étudions le comportement en temps long de certains processus stochastiques dont la dynamique dépend non seulement de la position, mais aussi du temps, et dont le terme de diffusion et le potentiel satisfont des conditions d'invariance d'échelle. Nous mettons en lumière un phénomène de transition de phase générale, entièrement déterminé par les différents indices d'auto-similarité en jeu. La principale idée mise en exergue est de considérer une transformation d'échelle adéquate, tirant pleinement parti des nombreuses invariances de notre problème.

Dans une première partie, nous étudions une famille de processus de diffusion unidimensionnels, dirigés par un mouvement brownien, dont la dérive est polynomiale en temps et en espace. Ces diffusions généralisent les marches aléatoires, en lien avec le modèle d'urne de Friedman, étudiées par Menshikov et Volkov (2008). Nous donnons, de manière exhaustive, les lois du type logarithme itéré, les limites d'échelle ainsi que les temps de survie de ces processus.

La seconde partie est, quant à elle, consacrée à l'étude d'une famille de processus de diffusion en environnement aléatoire, dirigés par un mouvement brownien unidimensionnel, dont le potentiel est brownien en espace et polynomial en temps. Ces diffusions sont une extension du modèle amplement étudié de Brox (86) et, en un sens randomisé, du modèle précédent. La différence notable avec le modèle déterministe est que nous obtenons, dans le cas critique, une mesure aléatoire quasi-invariante et quasi-stationnaire pour le semi-groupe, déduite de l'étude d'un système dynamique aléatoire sous-jacent.

## ABSTRACT

We study the asymptotic behaviour of some stochastic processes whose dynamics depends not only on position, but also time, and such that the diffusion term and the potential satisfy some scaling properties. We point out a general phase transition phenomenon, entirely determined by the self-similar parameters. The main idea is to consider an appropriate scaling transformation, taking full advantage of the scaling properties.

In the first part, we investigate a family of one-dimensional diffusion processes, driven by a Brownian motion, whose drift is polynomial in time and space. These diffusions are continuous counterparts of the random walks studied by Menshikov and Volkov (2008) and related to the Friedman's urn model. We give, in terms of all scaling parameters, the iterated logarithm type laws, the scaling limits and the explosion times of these processes.

The second part dealt with a family of diffusion processes in random environment, directed by a one dimensional Brownian motion, whose potential is Brownian in space and polynomial in time. This situation is a generalization of the time-homogeneous Brox's diffusion (86) studied in an extensive body of the literature. We obtain in the critical case a quasi-invariant and quasi-stationary random measure for the time-inhomogeneous semi-group, deduced from the study of a underlying random dynamical system.