

Table des matières

1	Rappels et compléments de Probabilités	2
1.1	Loi d'une variable aléatoire et indépendance	2
1.2	Moments, loi normale et produit de convolution	4
1.3	Convergences stochastiques	6
1.4	Fonctions caractéristiques	8
1.5	Théorèmes limites	12
2	Vecteurs gaussiens	14
2.1	Autour des lois normales	14
2.2	Exercices d'applications et caractérisations	17
3	Conditionnement	23
3.1	Conditionnement discret	23
3.2	Espérance conditionnelle	26
3.3	Loi conditionnelle	30
3.4	Cas gaussien	32
3.5	Martingales	34

1 Rappels et compléments de Probabilités

1.1 Loi d'une variable aléatoire et indépendance

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{P}(X = 0) = 1/6$; $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 4) = 1/3$. Tracer le graphe de la fonction de répartition de X .

Exercice 2. Préciser la loi de $Y = e^{1/X}$ et $Z = \sin(\pi X)$ quand X suit une loi $\mathcal{U}([-1, 1])$.

Exercice 3. Soit X une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On considère Y la v.a. définie par $Y = \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a ? Déterminer la loi de Y .

Exercice 4. Montrer qu'il existe une v.a. X , à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{4} \frac{2^k}{k!} (1 + ak),$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.

Exercice 5. Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de

$$Y = \begin{cases} X/2 & \text{si } X \text{ est pair,} \\ \frac{1-X}{2} & \text{si } X \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 6. Soit X une v.a. de loi géométrique de paramètre p , $0 < p < 1$. On considère

$$Y = 4 \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1.$$

Calculer la loi de Y .

Exercice 7. Une urne contient n boules dont 2 rouges et $n - 2$ blanches, $n > 2$. On effectue n tirages sans remise. On note X le rang du 1^{er} tirage d'une boule rouge et Y le rang du second tirage. Calculer la loi de (X, Y) puis les lois de X et Y .

Exercice 8. Montrer qu'il existe une v.a. X dont la fonction de répartition vaut $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ pour tout réel x . Calculer la densité de X . On pose $Y = e^X$, $Z = X \mathbb{1}_{\{0 < X < 1\}}$ et $U = \mathbb{1}_{\{0 < X < 1\}}$. Déterminer les lois de Y , Z et U .

Exercice 9. Soient deux densités de probabilité f et g . Si f est proportionnelle à g , montrer que $f = g$ presque partout. Si f est supérieur ou égale à g , a-t-on aussi $f = g$ presque partout?

Exercice 10. Soit $f(x) = \frac{K}{(1+x)^2} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$. Calculer K pour que f soit la densité d'une v.a. X . Trouver la fonction de répartition de X . En déduire $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$.

Exercice 11. On jette un point D au hasard sur le cercle de centre $O' = (1/2, 0)$ et de rayon $1/2$, de sorte que pour tout arc $\mathcal{A}$ du cercle, $\mathbb{P}(D \in \mathcal{A})$ est proportionnel à la longueur de $\mathcal{A}$.

1. Calculer le coefficient de proportionnalité.
2. Soit $A = (1, 0)$ et $\Theta \in]-\pi, \pi[$ la mesure de l'angle $(O'A, O'D)$ qui appartient à $]-\pi, \pi]$. Quel est la loi de Θ ?
3. On pose $D =: (X, Y)$. Trouver la loi de X (loi de l'Arc Sinus).

Exercice 12. Le couple de v.a. (X, Y) a pour densité jointe f , définie par :

$$f(x, y) = \frac{4}{5} (x + 3y) e^{-x-2y} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(y).$$

Vérifier que f est bien une densité. Calculer la densité de X et celle de Y . X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 13. Deux personnes A et B ont rendez-vous à 13h00 mais elles sont peu ponctuelles, de telle sorte que les instants X et Y de leurs arrivées sont indépendants et uniformément répartis sur $[13, 14]$. On note T la durée de l'attente du premier arrivé. Calculer la loi de T .

Exercice 14. Soient X et ε deux v.a.r. indépendantes, telles que $\mathbb{P}(\varepsilon = +1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$ et X admette une densité f . Montrer que εX admet une densité et la calculer. Si f est paire montrer X et $-X$ ont même loi.

Exercice 15. Soient X et Y deux v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$, f et g deux fonctions boréliennes. Montrer que $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux v.a. indépendantes. Soient X , Y et Z trois v.a.r. indépendantes, montrer que $X + Y$ est indépendante de Z^2 .

Exercice 16. Soient X et Y indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $U = \inf\{X, Y\}$ et $V = \sup\{X, Y\}$.

1. Calculer la fonction de répartition de V (resp. U) et en déduire que cette v.a. admet une densité que l'on déterminera explicitement.
2. Montrer que $T = U/V$ suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 17. Soient X et Y deux v.a. indépendantes et admettant la même densité f .

1. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{P}(X < Y)$ et $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Déterminer la densité de $Z = X - Y$. Montrer que cette fonction est paire. Retrouver les résultats précédents.

1.2 Moments, loi normale et produit de convolution

Exercice 18. Soit X une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Vérifier que $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et calculer $\mathbb{E}[X(X-1)]$.
2. En déduire le moment d'ordre deux de X et sa variance.

Exercice 19. Soit X suit une loi géométrique.

1. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X(X-1)]$.
2. En déduire la variance de X .

Exercice 20. Une v.a. prend les valeurs $-1, 0$ et 1 avec les probabilités respectives $p/2, 1-p$ et $p/2$. Calculer la covariance de X et X^2 .

Exercice 21. Soient A et B deux événements indépendants, vérifiant : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$. Déterminer la loi de $X = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$, $Y = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B$ et $Z = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$. Calculer les espérances.

Exercice 22. Deux joueurs A et B jouent à un jeu d'argent. A (resp. B) gagne avec probabilité p (resp. $1-p$) pour B , où $0 < p < 1$. Les mises de A et B sont respectivement de $s\$$ et $s'\$$, et le vainqueur empoche le total des enjeux. Trouver une condition portant sur s, s' et p , pour que le jeu soit équitable.

Exercice 23. Une personne a n clés dans sa poche et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle prend au hasard les clés les unes après les autres et les essaye. On note X le nombre de clés qu'elle essaye avant de trouver la bonne. En supposant qu'une clé une fois essayée est ensuite mise de côté.

1. Quelle est la probabilité p_k que cette personne tire la bonne clé à la $k^{\text{ème}}$ tentative ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

Exercice 24. Statistique de Wilcoxon. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On extrait ces boules de l'urne les unes après les autres, au hasard et sans remise, et on note R_k le numéro porté par la $k^{\text{ème}}$ boule tirée de l'urne.

1. Donner la loi de R_k , son espérance et sa variance.
2. On pose :

$$W_n := R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

- (a) Calculer l'espérance de W_n .
- (b) Calculer la loi du couple (R_i, R_j) , $i \neq j$, et vérifier qu'elle ne dépend pas de (i, j) .
- (c) Calculer $\mathbb{E}[W_n^2]$ et en déduire successivement $\mathbb{E}[R_i R_j]$ puis la variance de W_n .

Exercice 25. Dans une population on sait qu'il y a une proportion q d'individus atteints d'une certaine maladie, décelable par analyse du sang. On veut déceler cette maladie dans un groupe d'individus et, plutôt que d'analyser le sang de chaque individu séparément, on procède par la méthode des examens groupés : on mélange le sang de r personnes et on fait une analyse ($r \geq 2$). Si la maladie est décelée, il faut examiner individuellement chacune des r personnes (il aura alors fallu $r+1$ analyses); sinon une seule analyse aura suffi. Soit X_r le nombre d'analyses nécessaires pour examiner r personnes.

1. Calculer $\mathbb{E}(X_r)$ en fonction de $p = 1 - q$, et de r .
2. A quelle condition sur p et r réalise-t-on ainsi une économie par rapport à la méthode qui consisterait à analyser d'emblée chaque personne individuellement ? p étant donné, avec $0 < p < 1$, discuter l'existence de r permettant de réaliser une économie ?

3. Quelle est la valeur de r optimale, si on a à analyser le sang de n personnes (on prendra n grand et on supposera qu'on divise les n échantillons en groupes égaux) ?

Exercice 26. 1. Soit X une v.a. uniforme sur $[a, b]$. Calculer $\mathbb{E}[X^k]$, $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$.

2. On se donne une v.a.r. Z de densité f définie par :

$$f(x) := K[x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x)]$$

Calculer K , $\mathbb{E}(Z^k)$ pour chaque entier naturel k . En déduire la variance de Z .

3. On se donne deux v.a.r. indépendantes X et Y de loi uniforme sur $[0, 1]$. Vérifier que $X + Y$ a même loi que Z . Retrouver le résultat précédent.

Exercice 27. Une v.a.r. X suit la loi $\gamma(a, b)$ avec $a > 0$ et $b > 0$ si X admet pour densité :

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/b} \mathbb{1}_{\{x>0\}}, \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^k]$ et $\text{Var}(X)$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X (resp. Y) de loi $\gamma(a, b)$ (resp. $\gamma(c, b)$) avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.
 - (a) Montrer que $X + Y$ a une densité que l'on calculera. En déduire : $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, où $a > 0$ et $b > 0$, $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$.
 - (b) Trouver la densité du vecteur aléatoire (U, V) avec $U = X + Y$, $V = \frac{Y}{X+Y}$. Les v.a.r. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 28. On a étudié la glycémie sur un échantillon de 300 individus. On a constaté que 20 % des glycémies sont inférieures à 0.82 g/l et que 30 % des glycémies sont supérieures à 0.98 g/l. Sachant que la glycémie des individus suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart type de cette loi.

Exercice 29. Soient a et b deux réels, et X une v.a.r. gaussienne. On désigne par m sa moyenne et σ son écart-type.

1. Montrer que $aX + b$ est encore une v.a. gaussienne et évaluer ses paramètres, en déduire sa densité. Calculer directement la densité de $aX + b$.
2. Calculer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition de la loi gaussienne réduite et centrée.

Exercice 30. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = X^2$. Donner la densité de Y et son espérance.

Exercice 31. On pose $f(x, y) = \frac{k}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2}(3x^2 - 3xy + y^2) \right]$.

1. Déterminer k pour que f soit la densité d'un couple de v.a. (X, Y) .
2. Calculer la densité de X et celle de Y . Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 32. On se donne un vecteur aléatoire $Z := (X, Y)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, où X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes et de densité de probabilité f définie par :

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2).$$

Soient θ et (U, V) le couple de v.a. : $U = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y$ et $V = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y$. Déterminer la loi de U et celle de V . Sont-elles indépendantes ?

1.3 Convergences stochastiques

Exercice 33. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires positives et indépendantes suivant la même loi de fonction de répartition F et de densité f vérifiant : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda$, ($\lambda > 0$). On pose $U_n = \inf\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Montrer que nU_n converge en loi vers une variable aléatoire U dont on précisera la loi.

Exercice 34. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Bernoulli telles que $\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{n}$. Etudier la convergence en probabilité et presque-sûre.

Exercice 35. Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $]0, 1[$ et N le nombre aléatoire de ces variables qui prennent une valeur dans l'intervalle $]0, \frac{1}{n\lambda}[$ où $\lambda > 0$.

1. Calculer $p_n = \mathbb{P}(N = 0)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.
2. Déterminer la loi de N .
3. Montrer que N converge en loi vers une variable aléatoire Z que l'on précisera.

Exercice 36. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. de loi $\mathcal{E}(1)$. On veut montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} = 1\right) = 1.$$

1. Montrer que cela est équivalent à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{\frac{X_n}{\ln(n)} > 1 + \varepsilon\right\}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{\frac{X_n}{\ln(n)} > 1 - \varepsilon\right\}\right) = 1.$$

2. En appliquant Borel-Cantelli et sa réciproque montrer le résultat.

Exercice 37. Soit $n \geq 1$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ et

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \dots, X_m\} = \{1, \dots, n\}\},$$

le premier temps où toutes les valeurs ont été observées. On pose également pour $1 \leq k \leq n$,

$$\tau_k^n = \inf\{m \geq 1 : \text{card}(\{X_1, \dots, X_m\}) = k\}.$$

1. Que vaut τ_1^n et τ_n^n ?
2. Montrer que les v.a. $(\tau_{k+1}^n - \tau_k^n)_{1 \leq k \leq n-1}$ sont indépendantes et déterminer leur loi.
3. En déduire l'espérance de T_n en fonction de la série harmonique.
4. Justifier que $\mathbb{V}(T_n) \leq cn^2$ pour une certaine constante $c > 0$.
5. Montrer que

$$\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n \ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

6. En déduire que

$$\frac{T_n}{n \ln(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 38. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. de loi $\mathcal{E}(1)$ et $M_n = \max(T_1, \dots, T_n)$. On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\ln(n)} = 1 \quad \text{p.s..}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(M_n \geq x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \geq 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{M_{n_k}}{\ln(n_k)} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{p.s..}$$

pour une sous-suite n_k bien choisie, par exemple de la forme 2^k .

3. Soit $n \geq 1$ et k tel que $n_k \leq n < n_{k+1}$. Justifier

$$\frac{M_n}{\ln(n)} \leq \frac{M_{n_{k+1}}}{\ln(n_{k+1})} \frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)}.$$

4. En déduire le résultat annoncé.

Exercice 39 (Loi forte des grands nombres avec des moments d'ordre 4). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de v.a. admettant une moyenne m et $S_n := X_1 + \dots + X_n$. On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad \text{p.s..}$$

1. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat lorsque $m = 0$, ce que l'on supposera ensuite.
2. Soient $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 + \dots + k_n = 4$. Montrer que $\mathbb{E}[X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}] = 0$ excepté lorsque il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $k_i = k_j = 2$ ou lorsqu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $k_i = 4$.
3. Justifier que $\mathbb{E}[X^2 Y^2] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^4] \mathbb{E}[Y^4]}$ quelques soient les v.a.r. X et Y .
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{6\mathbb{E}(X_1^4)}{\varepsilon^4 n^2}.$$

5. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \text{p.s..}$$

Exercice 40. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. convergeant en loi vers X . Montrer que quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un intervalle $[a, b]$ et $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$\mathbb{P}(X_n \in [a, b]^c) \leq \varepsilon.$$

Exercice 41. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $(X_n/n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une v.a. uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 42. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $G_n(z)$ et $G(z)$ leurs fonctions génératrices respectives. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X ;
2. la suite $(G_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers G sur $[0, 1]$.

Exercice 43. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. telles que pour n assez grand $X_n \sim \mathcal{G}(\lambda/n)$. Montrer que la suite $(X_n/n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable exponentielle.

Exercice 44. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que $n(\theta - M_n)$ converge en loi et préciser la limite.
2. Montrer que $\theta - M_n$ converge en probabilité vers 0.
3. Montrer que M_n converge presque sûrement vers θ .
4. On suppose inconnu le paramètre θ et on observe un échantillon de taille n . Donner un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance c .

1.4 Fonctions caractéristiques

Exercice 45. Soient $b_{n,p}$ et p_λ les deux familles de probabilités :

$$b_{n,p} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad p_\lambda = \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta_k,$$

où $n \geq 1$, $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$. En utilisant la fonction caractéristique, vérifier les deux identités :

$$b_{n,p} * b_{m,p} = b_{n+m,p}, \quad p_\lambda * p_\mu = p_{\lambda+\mu},$$

où $n \geq 1$, $m \geq 1$, $p \in [0, 1]$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

Exercice 46. Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y et de fonctions caractéristiques respectives φ_X et φ_Y . On suppose X et Y admettent des moments d'ordre deux.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$ on définit U une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $u \mapsto F_X(\frac{u-a}{b})$. Montrer que U a la même loi que $bX + a$. Déterminer φ_U la fonction caractéristique de la loi de U . Calculer $\mathbb{E}[U]$ et $\text{Var}(U)$ à partir de φ_U .
2. Pour $\theta \in [0, 1]$ on pose $G(z) = (1 - \theta)F_X(z) + \theta F_Y(z)$. Montrer que G est une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$.
3. Soit V une variable aléatoire admettant la fonction de répartition G . Montrer que V a la même loi que $\epsilon X + (1 - \epsilon)Y$ avec ϵ une variable aléatoire de Bernoulli indépendante de X et Y dont on déterminera le paramètre. Déterminer φ_V sa fonction caractéristique et en déduire $\mathbb{E}[V]$ et $\text{Var}(V)$.

Exercice 47. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et $Z = X + Y$. On veut montrer que si X est indépendante de Z et Y indépendante de Z , alors Z est presque sûrement constante.

1. Montrer que $|\varphi_Z(t)| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Soit Z' une variable aléatoire indépendante de Z et de même loi, montrer que $Z = Z'$ presque sûrement.
3. En utilisant la fonction de répartition F_Z , en déduire que Z est presque sûrement constante.

Exercice 48. Fonction caractéristique de la loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit t un réel positif fixé. On note

$$h(z) = \frac{e^{itz}}{\pi(1+z^2)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}.$$

Pour tout $R > 0$, on note Γ_R le contour : $\Gamma_R = \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2$. Γ_R^1 est l'arc de cercle AB contenu dans le demi-plan supérieur, centré à l'origine et Γ_R^2 est le segment $[BA]$. Ici A est de coordonnées $(-R, 0)$ et B de coordonnées $(R, 0)$.

(a) En utilisant le théorème des résidus, montrer

$$\int_{\Gamma_R} h(z) dz = e^{-t}.$$

(b) Vérifier ensuite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^2} h(z) dz = \hat{\varphi}(t); \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^1} h(z) dz = 0.$$

(c) En déduire

$$\hat{\varphi}(u) = e^{-|u|} \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

3. Pour tout $a > 0$, on note $\varphi_a(x) = \frac{1}{a}\varphi(\frac{x}{a}) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$. Montrer

$$\varphi_a * \varphi_b = \varphi_{a+b}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Exercice 49. Soit X une variable aléatoire réelle et φ_X sa fonction caractéristique. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \geq 0.$$

En déduire que la matrice $(e^{-|j-i|})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique positive.

Exercice 50. Calculer la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ de $y \rightarrow \frac{1}{a}(1 - \frac{|y|}{a})_+$. En déduire

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{1 - \cos(ax)}{a^2 x^2} dx = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|u|}{a}\right)_+ \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Exercice 51. Soient X une v.a.r. à valeurs réelles, et φ_X sa fonction caractéristique.

1. Montrer :

$$\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire : $|\varphi_X(t)|^2 = \varphi_{X+Y}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, où Y désigne une copie indépendante de $-X$.

3. On suppose que X suit une loi symétrique (i.e. $\mathbb{P}(X \leq -t) = \mathbb{P}(X \geq t)$ pour tout réel t). Montrer que la fonction caractéristique de X est à valeurs réelles. Etablir la réciproque : si la fonction caractéristique de X est à valeurs réelles alors X suit une loi symétrique.

4. Montrer que la partie réelle d'une fonction caractéristique est à nouveau une fonction caractéristique.

Exercice 52. Soient X , Y et Z trois v.a.r. telles que : X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, Y la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et U de loi $\gamma(a, b)$. On rappelle que

$$\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n, \quad \varphi_Y(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}, \quad \varphi_U(t) = \frac{1}{(1 - itb)^a}.$$

Calculer le moment d'ordre un et la variance de ces trois v.a.r. via les fonctions caractéristiques

Exercice 53. Montrer en utilisant les fonctions caractéristiques que la somme de deux v.a. indépendantes, de Poisson (resp. gaussiennes, de loi gamma, de Cauchy) est encore une v.a. de Poisson, resp. gaussienne, de loi gamma, de Cauchy.

Exercice 54. Soient $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ une suite de fonctions caractéristiques et $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels positifs de somme égale à un.

1. Montrer que $\sum_{k \geq 0} \alpha_k \varphi_k$ est une fonction caractéristique.

2. En déduire (théorème de Finetti) que si φ est une fonction caractéristique et $\lambda > 0$, la fonction $\varphi_\lambda = e^{\lambda(\varphi-1)}$ est une fonction caractéristique.

3. Montrer que $t \rightarrow \exp\left(-\frac{t^2}{1+t^2}\right)$ est une fonction caractéristique.

Exercice 55. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant la densité jointe :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 + xy(x^2 - y^2) \right), \quad |x| < 1, \quad |y| < 1.$$

Montrer que les fonctions caractéristiques satisfont :

$$\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{X+Y}(t)$$

et que les variables X et Y sont dépendantes.

Exercice 56. Soit X une v.a.r.. On dit que X admet des moments de tous ordres lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$.

1. Montrer que si X est bornée alors elle admet des moments de tous ordres et que sa fonction caractéristique s'écrit alors

$$\varphi_X(t) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[X^n] \frac{(it)^n}{n!}.$$

2. Soit X et Y deux v.a. bornées telles que $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ quelque soit $n \geq 0$. Montrer que X et Y ont la même loi.
3. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On pose $X = e^Z$. Déterminer la densité f de X justifier que X admet des moments de tous ordres.
4. On pose $g(x) = f(x)(1 + \sin(2\pi \ln(x)))$. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\int_0^\infty x^n f(x) dx = \int_0^\infty x^n g(x) dx.$$

On pourra faire le changement de variable $y = e^{x-n}$. En déduire qu'il existe deux v.a. ayant les mêmes moments mais pas la même loi.

Exercice 57. Soit $(Y_k)_{k \geq 0}$ une suite i.i.d. de v.a. de loi normale centrée réduite et N une v.a. indépendantes des Y_k de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$S = \sum_{k=0}^N Y_k.$$

1. Calculer la fonction génératrice $G(z) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(N = n) z^n$ définie pour tout $|z| \leq 1$.
2. Calculer la fonction caractéristique de S .

Exercice 58. On considère X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = X_1 X_2 + X_3 X_4$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de $X_1 X_2$ vaut

$$t \rightarrow \phi_{X_1 X_2}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_1 X_2}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. En déduire la fonction caractéristique de Y .
3. Soit Z une variable aléatoire de densité $x \rightarrow e^{-|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction caractéristique.

Exercice 59. On note φ la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X .

1. Calculer la fonction caractéristique d'une v.a. X de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ puis de loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$. Résoudre dans les deux cas l'équation $\varphi(a) = 1$.
2. Montrer de manière générale que

$$\exists a \neq 0, \varphi(a) = 1 \iff \mathbb{P}(X \in (2\pi/a)\mathbb{Z}) = 1.$$

On pourra d'abord remarquer (et justifier) que si $\varphi(a) = 1$ alors $\mathbb{E}[1 - \cos(aX)] = 0$.

Exercice 60. On note φ la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X .

1. Soit X une v.a. de loi triangulaire sur $[-1, 1]$, i.e. de densité sur $[-1, 1]$ définie par

$$t(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

2. Montrer que $X \sim U - V$ où U, V i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
3. En déduire la fonction caractéristique de X et son espérance et la variance.

Exercice 61. 1. On rappelle que la fonction caractéristique d'une v.a. de loi de Cauchy est donnée par $\varphi(t) = e^{-|t|}$. Expliquer ce qui ne va pas dans le raisonnement suivant : On a au voisinage de 0, $\varphi(t) = 1 + i \times 0 \times t + o(t)$. On peut donc en déduire que $\mathbb{E}[X] = 0$.

2. Soit φ une fonction caractéristique. Montrer que si $\varphi(t) = 1 + im_1t - \frac{1}{2}m_2t^2 + o(t^2)$ où $m_2 \geq 0$ alors $\mathbb{E}[X] = m_1$ et $\mathbb{E}[X^2] = m_2$. On pourra considérer $\varphi(-t) + \varphi(t)$ et utiliser le lemme de Fatou.

1.5 Théorèmes limites

Exercice 62. 1. Soit $X_n \sim \mathcal{P}(n)$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini,

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une limite que l'on précisera.

2. Quelle est la limite de la suite

$$u_n = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!},$$

lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 63. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et de carré intégrable. Supposons de plus que

$$\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \text{ a même loi que } X_1.$$

1. Quelle est l'espérance commune des variables X_n ?

2. Pour $n > 0$, que peut-on dire de la loi de

$$\frac{X_1 + \dots + X_{2^k}}{2^{k/2}} ?$$

3. En déduire que les X_n sont des variables gaussiennes.

Exercice 64. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Cauchy de paramètres (a, b) ($a \in \mathbb{R}, b > 0$) notée $\mathcal{C}(a, b)$ si la densité de la loi de X est définie par :

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + (x - a)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On définit la fonction h par :

$$\forall t > 0, \quad h(t) = \int_t^\infty \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx \quad \text{et} \quad h(0) = \frac{\pi}{2}.$$

1. A partir de l'expression de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy $\mathcal{C}(0, 1)$, montrer que

$$\frac{b}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{b^2 + (x - a)^2} dx = \exp(iat - b|t|).$$

2. Déterminer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{C}(a, b)$.

3. Soit Y une variable aléatoire réelle suivant une loi, notée $\mathcal{P}_a(\theta)$ avec $\theta > 0$ de densité :

$$f_Y(y) = \frac{\theta}{2y^2} 1_{\{|y| \geq \theta\}}.$$

Exprimer φ_Y la fonction caractéristique de Y en fonction de h .

4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{P}(2/\pi)$. On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pour tout $\eta > 0$, calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{|S_n|}{n} \geq \eta \right).$$

Exercice 65. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carrés intégrables et non constantes. On pose $\mathbb{V}[X_1] = \sigma^2$ et $\mathbb{E}[X_1] = m$ ainsi que

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - m)}{\sigma \sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $(Z_{2n} - Z_n)_{n \geq 0}$ converge en loi et identifier la limite.
2. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 66. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(\mathbb{E}[X_1]) \right| \right] \leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right| > \delta \right).$$

2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0, 1]$. On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$P_n(x) := \mathbb{E} \left[f \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right) \right].$$

Montrer que $(P_n)_{n \geq 1}$ est une suite de polynômes qui converge uniformément vers f .

Exercice 67. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$ converge en loi vers une limite que lon précisera.

2 Vecteurs gaussiens

2.1 Autour des lois normales

Exercice 68. Soit $I := \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx$. Montrer que I est une intégrale convergente. Calculer I^2 en passant en coordonnées polaires. Que vaut I ?

Exercice 69. Pour tout $a, b > 0$, on appelle loi $\gamma(a, b)$ la loi de densité :

$$\frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} b^a e^{-bx} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

1. Calculer la transformée de Laplace de cette loi, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{a-1} b^a e^{-bx} dx.$$

Prouver que l'espérance de cette loi vaut a/b et sa variance a/b^2 .

2. Vérifier que $\gamma(a, b) * \gamma(a', b) = \gamma(a + a', b)$. En déduire que :

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{a'-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(a')}{\Gamma(a+a')}.$$

3. Injectivité de la transformée de Laplace : Soient ξ, η deux variables aléatoires positives. On suppose que, pour tout λ réel positif :

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda\xi}) = \mathbb{E}(e^{-\lambda\eta}).$$

4. On note $\varphi(z) = \mathbb{E}(e^{z\xi})$ et $\psi(z) = \mathbb{E}(e^{z\eta})$. Montrer que φ et ψ sont bien définies, continues sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ et holomorphes dans $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$.
5. Montrer que φ et ψ coïncident sur $\mathbb{R}_-$. En déduire que ces fonctions coïncident sur $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$, et donc que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(e^{it\xi}) = \mathbb{E}(e^{it\eta}).$$

6. Montrer que ξ et η ont la même loi.
7. Loi chi-deux : Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles gaussiennes réduites et indépendantes. Prouver que :

$$Z := \sum_{j=1}^n X_j^2 \sim \gamma(n/2, 1/2).$$

On dit que Z suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté.

Exercice 70. Loi chi-deux décentrée : Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, des variables aléatoires réelles gaussiennes, indépendantes, telles que $X_j \sim \mathcal{N}(m_j, 1)$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de $Z := \sum_{j=1}^n X_j^2$ est :

$$\mathbb{E}(e^{itZ}) = \frac{1}{(1 - 2it)^{n/2}} \exp\left(\frac{itr}{1 - 2it}\right),$$

où $r := \sum_{j=1}^n m_j^2$. (On dit que Z suit une loi de χ^2 à n degrés de liberté, décentrée).

2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\operatorname{Var}(Z)$.

Exercice 71. *Loi beta : Soient $a, b > 0$. Désignons par Z_a, Z_b deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement $\gamma(a, 1), \gamma(b, 1)$.*

1. *Trouver la densité du vecteur aléatoire*

$$(U, V) := \left(Z_a + Z_b, \frac{Z_a}{Z_a + Z_b} \right).$$

2. *Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ? (On dit que V suit une loi $B(a, b)$.)*

Exercice 72. *Loi de Cauchy et loi arcsinus :*

1. *Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. Montrer que la v.a. $C = X/Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.*
2. *Soit $V \sim B(1/2, 1/2)$ une v.a. de loi arcsinus. Prouver que la variable aléatoire $1/V$ a la même loi que la v.a. $1 + C^2$, où C suit une loi de Cauchy de paramètre 1.*

Exercice 73. *Soit $E \sim \gamma(1, 1)$ et $V \sim B(1/2, 1/2)$ deux variables indépendantes (E est de loi exponentielle de paramètre 1). Montrer que : $2EV \sim G^2$, où G est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. On pourra observer que le relation précédente équivaut à : $\forall a \geq 0$,*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty e^{-t^2/2} dt = E \left[\exp -\frac{a^2}{2V} \right].$$

Exercice 74. *Loi Fisher-Snedecor : Soient $X \sim \gamma(a, b)$ et $Y \sim \gamma(c, d)$ deux variables aléatoires indépendantes.*

1. *Trouver la loi de la variable aléatoire X/Y .*
2. *Supposons que $a = n/2, c = m/2, b = d = 1/2$. Trouver la loi de :*

$$R := \frac{X/n}{Y/m}$$

On dit que R suit une loi de Fisher-Snedecor à n et m degrés de liberté.

3. *Calculer $E(R)$ et $\text{Var}(R)$ (discussion suivant les valeurs de n et m).*

Exercice 75. *Loi Student : Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \chi^2(n)$ deux v.a. indépendantes.*

1. *Trouver la loi de la variable aléatoire :*

$$T := \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

On dit que T suit une loi de Student à n degrés de liberté.

2. *Calculer $E(T)$ et $\text{Var}(T)$.*

Exercice 76. *On note par g_n la densité d'une variable aléatoire de loi $\chi^2(n)$:*

$$g_n(x) := \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

1. *Étudier la régularité de g_n à l'origine et le graphe de g_n .*
2. *Pour quelle valeur de x , $g_n(x)$ est-elle maximum ?*
3. *Étudier le comportement de ce maximum quand $n \uparrow \infty$.*

Exercice 77. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi.

1. Montrer que si X et Y sont deux variables gaussiennes centrées réduites, alors $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
2. Théorème de Bernstein : Réciproquement, on suppose que X et Y sont de carré intégrable et que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. On veut montrer que X et Y sont deux variables gaussiennes. Pour cela :
 - a) Montrer qu'on peut supposer que X et Y sont centrées, de variance 1.
 - b) Montrer que φ , la fonction caractéristique commune de X et de Y , satisfait l'égalité $\varphi(2t) = \varphi(t)^3 \varphi(-t)$. En déduire que φ ne s'annule nulle part.
 - c) On pose $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi(-t)$. Montrer que $\psi(2t) = \psi(t)^2$ et que $\psi(t) = 1 + o(t^2)$, lorsque $t \downarrow 0$. En déduire que, pour tout t , $\psi(t) = 1$ et que $\varphi(t) = \varphi(t/2)^4$. Conclure.

Exercice 78. Loi log-normale : Soit X une v.a. telle que $\ln X$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Trouver la densité de X et calculer ses moments $\alpha_n := E(X^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Exercices d'applications et caractérisations

Exercice 79. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite et ε une autre variable aléatoire indépendante de X , prenant seulement les valeurs ± 1 .

1. Montrer que $Y := \varepsilon X$ est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite.
2. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
3. La variable aléatoire $X + Y$ est-elle gaussienne ?

Exercice 80. Soit X une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite. Pour tout $a > 0$ on note :

$$Y_a := -X\mathbf{1}_{\{|X| \leq a\}} + X\mathbf{1}_{\{|X| > a\}}.$$

1. Montrer que Y_a est une variable aléatoire réelle gaussienne centrée réduite.
2. Prouver que le couple (X, Y_a) n'est pas gaussien.
3. Y-a-t il une valeur de a telle que la matrice de covariance de (X, Y_a) soit l'identité ?

Exercice 81. Soit X une variable gaussienne centrée réduite et soit $c \geq 0$. On définit :

$$Y := \begin{cases} X, & \text{si } |X| \leq c \\ -X, & \text{si } |X| > c. \end{cases}$$

1. Montrer que Y est une variable gaussienne centrée réduite pour chaque c .
2. Calculer $E(XY)$.
3. Les variables X et Y sont-elles non-corrélées ? indépendantes ?

Exercice 82. Soit la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Justifier qu'il existe un v.a. gaussien (X, Y, Z) de moyenne $(1, 0, 1)$ et de covariance K .
2. Ce vecteur gaussien admet-il une densité ?
3. Montrer que les v.a. $X - 2Z$ et $Y - X - Z$ sont indépendantes et préciser leurs lois.
4. Déterminer la fonction caractéristique et la densité de $\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}}, \frac{Z-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 83. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $K_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. À quelle condition sur α existe-t-il un vecteur gaussien (X, Y, Z) de loi $\mathcal{N}(0, K_\alpha)$.
2. À quelle condition sur α ce vecteur admet-il une densité ?
3. Qu'elle est la loi de $X + Y + Z$?
4. Montrer qu'il existe une constante β telle que $Y - \beta Z$ soit indépendante de Z .

Exercice 84. Soit $0 < t_1 < t_2 < t_3$ et la matrice $K = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix}$

1. Justifier qu'il existe un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2, X_3)$ centré et de covariance K .
2. Ce vecteur gaussien admet-il une densité ?
3. Montrer que les v.a. $X_3 - X_2$ et $X_2 - X_1$ sont indépendantes et préciser leurs lois.

Exercice 85. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) := \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \left[\exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 + xy + y^2)\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\right) \right].$$

1. Montrer que le couple (X, Y) n'est pas gaussien.
2. Montrer que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites.
3. Les variables X et Y sont-elles non-corrélées ? indépendantes ?

Exercice 86. Soit $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de couple de variables aléatoires i.i.d. de loi caractérisée pour tout $(i, j) \in \{-1, 0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = j) = \frac{1}{8}.$$

1. Justifier que la formule précédente définit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.
3. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
4. Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (X_k, Y_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (U, V),$$

où (U, V) est un vecteur gaussien dont on précisera la matrice de covariance.

5. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 87. Soient X, Y, Z i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $V = (X - Y, X - Z, Y - Z, X + Y + Z)$.

1. Montrer que V est un vecteur gaussien et donner sa fonction caractéristique.
2. Montrer que $X + Y + Z$ est indépendante de $(X - Y)^2 + (X - Z)^2 + (Y - Z)^2$.

Exercice 88. Soit (X_1, X_2) un couple gaussien tel que :

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 0, \quad \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2) = 1, \quad \mathbb{E}(X_1 X_2) = \rho.$$

1. Montrer que $|\rho| \leq 1$.
2. Calculer la densité du couple (X_1, X_2) .
3. Retrouver, à partir du résultat de **2**) les lois marginales de X_1 et X_2 , ainsi que les quantités $\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \mathbb{E}(X_1^2), \mathbb{E}(X_2^2), \mathbb{E}(X_1 X_2)$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X_1 et X_2 soient indépendantes.
5. Que se passe-t-il quand $|\rho| = 1$?

Exercice 89. Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ et $(Y_k)_{k \geq 1}$ des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. Décrire le mode de convergence et la limite des suites

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} X_k \\ X_k Y_k \end{pmatrix} \right)_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} X_k - 1 \\ X_k Y_k - 1 \end{pmatrix} \right)_{n \geq 1}.$$

On justifiera soigneusement de l'application de tous les théorèmes utilisés.

Exercice 90. Soient X et Y deux v.a. réelles, indépendantes, de même loi, centrées et de variance 1. On suppose que la variable aléatoire $(X + Y)/\sqrt{2}$ a la même loi que X et Y .

1. Soit $\varphi(t) := E(e^{itX})$ la fonction caractéristique de X . Montrer que $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -1$.
2. Prouver que, pour tout t , $\varphi^2(t/\sqrt{2}) = \varphi(t)$. En déduire que, pour tout t , $\varphi(t) \neq 0$.
3. Montrer que, pour tout t et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\log \varphi(t)}{t^2} = \frac{\log \varphi(t/2^{n/2})}{(t/2^{n/2})^2}.$$

En déduire que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes.

Exercice 91. Soit (X, Y) un couple gaussien centré, de matrice de covariance égale à l'identité. Soit $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $Q = Y/X$. Montrer que R et Q sont deux variables aléatoires. Quelles sont les lois de R et Q ?

Exercice 92. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$f(x, y) := \lambda \exp \left[-\frac{1}{2}(2x^2 - 2xy + y^2) \right].$$

1. Que vaut λ ? Trouver les lois marginales de X et de Y .
2. Montrer que (X, Y) est un vecteur gaussien centré. Quelle est sa covariance ?

Exercice 93. Soit (X, Y) un couple gaussien. On suppose que X et Y sont centrées, de variance 1 et on note par ρ le coefficient de corrélation du couple. Montrer que :

$$P(XY > 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho.$$

Calculer $P(XY < 0)$.

Exercice 94. Soit (X, Y) un couple gaussien. On suppose que X et Y sont centrées, de variance 1 et le coefficient de corrélation du couple vaut ρ . Montrer que :

$$E[\max\{X, Y\}] = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.$$

Exercice 95. 1. Montrer qu'il existe un triplet gaussien (X_1, X_2, X_3) tel que :

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = 0, \quad E(X_1^2) = E(X_2^2) = E(X_3^2) = 1,$$

$$E(X_1X_2) = E(X_1X_3) = E(X_2X_3) = 1/2.$$

2. Quelle est la loi de $X_1 - X_2 + 2X_3$?
3. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X_1 + aX_2, X_1 - X_2)$ est un couple gaussien. Existe-t-il un a tel que $(X_1 + aX_2$ et $X_1 - X_2)$ soient indépendantes ?
4. Calculer la fonction caractéristique et la densité de (X_1, X_2, X_3) .

Exercice 96. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien centré de covariance identité. Soit A une matrice orthogonale $n \times n$. Définissons $Y := AX$.

1. Quelle est la loi de $\|Y\|^2 := \sum_{j=1}^n Y_j^2$?
2. On considère une décomposition en somme directe orthogonale de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^p E_j$, E_j orthogonal à E_k pour $j \neq k$. Soit Π_{E_j} la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur E_j et on note $X_{E_j} := \Pi_{E_j}(X)$. Montrer que les variables aléatoires X_{E_j} , $j = 1, \dots, p$, sont indépendantes et que $\|X_{E_j}\|^2$ suit une loi de χ^2 à r_j degrés de liberté, avec $r_j := \dim E_j$.

Exercice 97. Soit X un vecteur gaussien de dimension n , centré, de matrice de covariance K (de type $n \times n$). Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $p \times n$. On définit $Y := AX$, $Z := BX$. Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si $AKB^* = 0$.

Exercice 98. Soit X un vecteur gaussien de dimension n , centré, de matrice de covariance K inversible. Montrer que $X^*K^{-1}X \sim \chi^2(n)$.

Exercice 99. Soit

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe un triplet gaussien (X, Y, Z) , centré et de matrice de covariance K . Calculer la densité de ce triplet.
2. Trouver la loi de $U := X + 2Y - Z$.
3. Montrer que $Y^2/2 + Z^2/3 \sim \chi^2(2)$.
4. Montrer que $(X + Y, Y - Z)$ est un couple gaussien. Calculer sa densité.

Exercice 100. Théorème de Lévy-Cramer. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X + Y$ soit une variable gaussienne. On veut alors montrer que X et Y sont des variables gaussiennes.

1. Soit $u > 0$ et ξ une v.a.r. telle que $h_\xi(u) := E[e^{u\xi^2}] < \infty$ et $\psi_\xi(z) := E[e^{z\xi}]$, $z \in \mathbb{C}$.
 - a) Montrer que $|xz| \leq ux^2 + \frac{|z|^2}{u}$, $u > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.
 - b) Montrer que ψ_ξ est entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$).
 - c) Si ψ_ξ ne s'annule pas et $\ln |\psi(z)| \geq c + c'|z|^2$, pour deux constantes c, c' , montrer que

$$\psi_\xi(z) = \exp\left(bz + \frac{az^2}{2}\right), \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \geq 0.$$

On utilisera le théorème de Liouville : si f est entière telle que $|\operatorname{Re} f(z)| \leq c_1 + c_2|z|^2$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

- d) En déduire que ξ est une variable aléatoire gaussienne.
2. a) On peut supposer que les médianes de X et Y sont nulles.
- b) Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$P(|X + Y| > t) \geq P(X > t, Y > 0) + P(X < -t, Y < 0) + P(|X| > t, Y = 0),$$

$$P(X > t, Y > 0) \geq \frac{1}{2}P(X > t) - P(X > t, Y = 0),$$

$$P(X < -t, Y < 0) \geq \frac{1}{2}P(X < -t) - P(X < -t, Y = 0),$$

$$P(|X + Y| > t) \geq \frac{1}{2}P(|X| \geq t).$$

- c) Soit φ une fonction borélienne, positive et on note $\Phi(x) := a + \int_0^x \varphi(t)dt$, $x \geq 0$. Montrer que, pour toute variable aléatoire $\eta \geq 0$,

$$E\Phi(\eta) = a + \int_0^\infty \varphi(t)P(\eta > t)dt.$$

- d) En déduire que, pour toute variable aléatoire ξ ,

$$E[e^{u\xi^2}] = 1 + 2u \int_0^\infty te^{ut^2}P(|\xi| > t)dt.$$

- e) En utilisant **2.b)** et le point précédent, montrer que $h_X(u) \leq 2h_{X+Y}(u)$, $u > 0$.
- f) En déduire qu'il existe $u_0 > 0$, tel que, pour $0 < u < u_0$, $h_X(u), h_Y(u) < \infty$.
- g) Prouver le théorème de Lévy-Cramer.

Exercice 101. Soit $X \sim \mathcal{N}_1(m, \sigma^2)$ telle que $P(X \geq 3) = 0.8413$ et $P(X \geq 9) = 0.0228$. Calculer m et σ (on donne $\Phi(1) = 0.8413$ et $\Phi(2) = 0.9772$).

Exercice 102. Un ordinateur sort les chiffres au hasard de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 32 & 22 & 23 & 31 & 21 & 23 & 28 & 25 & 18 & 27 \end{pmatrix}.$$

La machine fournit-elle des nombres équi-répartis ? (la table de $\chi^2(9)$ donne $\alpha(0.05) = 16.92$).

Exercice 103. On considère la fonction :

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} x^3 \mathbf{1}_{[-1,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

et on note par g la densité gaussienne centrée réduite. On définit la fonction :

$$f(x, y) := g(x)g(y) + h(x)h(y).$$

Prouver que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas gaussienne, mais que les densités marginales sont gaussiennes.

Exercice 104. Soit $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$ et la fonction de répartition gaussienne

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^x g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que la fonction :

$$F(x, y) := \Phi(x) \Phi(y) [1 + a(1 - \Phi(x))(1 - \Phi(y))], \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est une fonction de répartition d'un couple aléatoire ayant les fonctions de répartition marginales $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$. Prouver que, si $a \neq 0$, le couple n'est pas gaussien.

2. Montrer que la fonction :

$$f(x, y) := g(x)g(y)[1 + a(2\Phi(x) - 1)(2\Phi(y) - 1)], \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est une fonction de densité d'un couple aléatoire ayant les marginales $g(x)$ et $g(y)$. Prouver que, si $a \neq 0$, le couple n'est pas gaussien.

Exercice 105. Soient $g_i(x, y)$ $i = 1, 2$ deux densités gaussiennes bidimensionnelles centrées de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_i \\ \rho_i & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

On définit :

$$f(x, y) := c_1 g_1(x, y) + c_2 g_2(x, y)$$

où c_1, c_2 sont arbitraires $c_1, c_2 \geq 0$ et $c_1 + c_2 = 1$.

1. Montrer que f est la densité d'un couple (X, Y) et que, si $\rho_1 \neq \rho_2$, alors le couple n'est pas gaussien.
2. Prouver que les variables X et Y sont des gaussiennes centrées réduites avec le coefficient de corrélation $\rho := c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2$.
3. Les variables X et Y sont-elles non-corrélées ? indépendantes ?

Exercice 106. Soient ξ_1 et ξ_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. On considère les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) définis par :

$$X_1 := \xi_1 + \xi_2, \quad X_2 := 2\xi_1 + \xi_2$$

et

$$Y_1 := \sqrt{2}\xi_1, \quad Y_2 := (3/\sqrt{2})\xi_1 + (1/\sqrt{2})\xi_2.$$

1. Calculer les espérances et les matrices de covariance des deux couples (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) .
2. Montrer que ces deux couples sont des couples gaussiens. Que peut-on remarquer ?

Exercice 107. Soient ξ_1 et ξ_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi gaussienne centrée réduite. On considère le vecteur aléatoire défini par :

$$(X, Y) := \begin{cases} (\xi_1, |\xi_2|), & \text{si } \xi_1 \geq 0, \\ (\xi_1, -|\xi_2|), & \text{si } \xi_1 < 0. \end{cases}$$

Montrer que le couple (X, Y) n'est pas gaussien, mais que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes.

Exercice 108. Soit $|\rho| < 1$ et (X, Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) := \begin{cases} [1/(\pi(1 - \rho^2)^{1/2})] \exp[-\frac{1}{2}\rho^{-2}(x^2 - 2\rho xy + y^2)], & \text{si } xy \geq 0 \\ 0, & \text{si } xy < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité, mais que le couple (X, Y) n'est pas gaussien.
2. Montrer que X et Y sont des variables gaussiennes centrées réduites.

Exercice 109. Soit ξ une variable aléatoire gaussienne réelle d'espérance m et de variance σ^2 et on note par g sa densité. On considère le vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ de densité

$$f_n(x_1, \dots, x_n) := \left(\prod_{i=1}^n g(x_i) \right) \left(1 + \prod_{j=1}^n (x_j - m)g(x_j) \right), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} (x - m)g^2(x)dx.$$

2. Montrer que f_n est une densité de probabilité.
3. On choisit p , $2 \leq p \leq n - 1$, composantes du vecteur $(X_1, \dots, X_n)$, par exemple les premières $(X_1, \dots, X_p)$. Montrer que la densité f_p de $(X_1, \dots, X_p)$ satisfait :

$$f_p(x_1, \dots, x_p) = g(x_1) \dots g(x_p).$$

4. En déduire que les variables $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes et gaussiennes.

3 Conditionnement

3.1 Conditionnement discret

Exercice 110. Soient $n \geq 1$ un entier fixé et p_1, p_2, p_3 trois réels positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. On note :

$$p_{ij} = \begin{cases} n! \frac{p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}}{i! j! (n-i-j)!}, & \text{si } i + j \leq n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un couple (X, Y) tel que $P(X = i, Y = j) = p_{ij}$.
2. Trouver les lois de X et de Y ainsi que celle de Y sachant X .
3. Calculer $E(XY)$.

Exercice 111. Soit N une variable aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de carré intégrable et indépendantes de N . On pose

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad (S = 0 \text{ si } N = 0).$$

1. Calculer $E[S|N = n]$ et en déduire $\mathbb{E}[S|N]$.
2. En déduire $E[S]$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[N]$.
3. Soit que les X_i soient également à valeurs dans $\mathbb{N}$ et notons G leur fonction génératrice et H celle de N . Exprimer la fonction génératrice de S en fonction des précédentes.

Exercice 112. Soit T une variable exponentielle de paramètre λ et $s \geq 0$. Calculer $\mathbb{E}[T|T > s]$.

Exercice 113. Soit X une v.a. réelle intégrable de densité f que l'on suppose continue. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$. Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}[X|x < X < x + h] = x.$$

Exercice 114. Une poule pond N œufs, où N suit une loi de Poisson de paramètre λ , i.e.

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}.$$

Chaque œuf éclot avec une probabilité p , indépendamment des autres œufs Soit K le nombre de poussins. Notre but est de calculer, puis d'interpréter les valeurs de $E(K|N)$, $E(K)$ et $E(N|K)$.

1. Montrer que $P(K = k|N = n) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$ et que $E(K|N) = pN$. En déduire que $E(K) = p\lambda$. Interpréter.
2. Montrer que si $n \geq k$,

$$P(N = n|K = k) = \frac{(q\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-q\lambda}.$$

Exercice 115. Soient $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$ deux v.a. indépendantes.

1. Pour tout $i \in \{0, 1\}$ calculer $\mathbb{E}[X|XY = i]$.
2. En déduire une expression simple de $\mathbb{E}[X|XY]$ en fonction de XY .

Exercice 116. Soient U, V des v.a. i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et $S = U + V$.

1. Que vaut $\mathbb{E}[S|U]$?
2. Déterminer la loi de S .
3. Calculer $\mathbb{E}[U|S]$.

Exercice 117. Un ascenseur dessert $n > 1$ étages d'un immeuble. Lors d'un voyage, on note X le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée. on admet que X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . On émet les hypothèses :

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
- Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

On note S le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée).

- Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, montrer que :

$$P(S = j | X = k + 1) = \frac{j}{n} \left(P(S = j | X = k) + \frac{n - j + 1}{n} P(S = j - 1 | X = k) \right).$$

Indication. On pourra considérer les événements $A_{k,j}$: « l'ascenseur compte au moins k passagers et les k premiers sélectionnent j étages distincts ».

- Après avoir justifié l'existence des espérances conditionnelles, montrer que :

$$E(S | X = k + 1) = 1 + \frac{1 - 1/n}{n} E(S | X = k).$$

- Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de S sachant que $X = k$.
- En déduire que $E(S) = n(1 - e^{-\lambda/n})$.

Exercice 118. Soit N une v.a. à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$; on note $\alpha_k = \mathbb{P}(N = k)$. On considère $(\varepsilon_n ; n \geq 0)$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi : $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\varepsilon_0 = 0) = q$, avec $p + q = 1$, $p > 0$ et $q > 0$. On suppose que N est indépendante de la famille $(\varepsilon_n ; n \geq 0)$. On définit alors la v.a. X par la relation : $X = \sum_{k=0}^N \varepsilon_k$.

- Calculer la loi de X . Exprimer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{E}(N^2)$.
- Soit $p' \in]0, 1[$. Déterminer la loi de N pour que la loi conditionnelle de N sachant $X = 0$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p')$.

Exercice 119. Soient $0 < p < 1$ et $(Y_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = 1 - p$. On pose $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, $n \geq 1$. Déterminer l'ensemble des réels $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\gamma^{S_{n+1}} \middle| \mathcal{A}_n \right] = \gamma^{S_n}.$$

Exercice 120. Soient $0 < p < 1$ et X, Y deux v.a. i.i.d. telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = (1 - p)^n p.$$

- Calculer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y$ et en déduire $\mathbb{E}[X | X + Y]$.
- Calculer la fonction de répartition de X et Y et en déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.
- Déterminer la loi de $X - Z$ sachant Z .

Exercice 121. Indépendance et (in)dépendance conditionnellement à une tribu

1. Soit (X, Y, Z) un triplet aléatoire discret dont la loi est donnée par :

$$P(X = k, Y = m, Z = n) := p^3(1 - p)^{m-3},$$

où $0 < p < 1$, $k = 1, \dots, m-1$, $m = 2, \dots, n-1$, $n = 3, 4, \dots$.

- a) Trouver lois des couples (X, Y) , (X, Z) et (Y, Z) et ensuite les marginales X , Y et Z . Montrer que X et Z sont dépendantes.
 - b) Calculer $P(Z = n \mid X = k, Y = m)$, $k = 1, \dots, m-1$, $m = 2, \dots, n-1$. En déduire, $E[Z \mid X = k, Y = m]$, pour $k = 1, \dots, m-1$, $m = 2, 3, \dots$ et ensuite $E[Z \mid \sigma(X, Y)]$.
 - c) Par un calcul similaire à celui du point précédent exprimer, pour toute fonction mesurable et bornée g , $E[g(Z) \mid \sigma(X, Y)]$. Montrer que cette quantité ne dépend pas de X .
 - d) En déduire que Z est indépendante de X , conditionnellement à la tribu $\sigma(Y)$, bien que Z et X sont dépendantes.
2. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . On note $Z := \mathbb{1}_{\{X+Y=0\}}$.
- a) Calculer $E[X \mid \sigma(Z)]$ et $E[Y \mid \sigma(Z)]$.
 - b) Montrer que les variables aléatoires X et Y sont dépendantes conditionnellement à la tribu $\sigma(Z)$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ . On note $S := X_1 + \dots + X_n$.
- a) Trouver la loi conditionnelle de X_1 sachant S et calculer ensuite $E[X_1 \mid \sigma(S)]$.
 - b) Montrer que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont dépendantes conditionnellement à la tribu $\sigma(S)$.
 - c) Calculer $E[X_1^2 \mid \sigma(S)]$ et $E[X_1 X_2 \mid \sigma(S)]$.

3.2 Espérance conditionnelle

Exercice 122. Soit $h : E \times G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et deux v.a. X et Y définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans les espaces mesurables $(E, \mathcal{E})$ et $(G, \mathcal{G})$ respectivement. On suppose que $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, que Y est $\mathcal{A}$ -mesurable et que X est indépendante de $\mathcal{A}$. On suppose que $F(X, Y)$ est positive ou intégrable.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}[h(X, Y) | \mathcal{A}] = \Phi(Y), \quad \text{avec } \Phi(y) = \mathbb{E}[h(X, y)].$$

On note également

$$\mathbb{E}[h(X, Y) | \mathcal{A}] = \mathbb{E}[h(X, y)]_{|y=Y}.$$

On pourra traiter la question dans un premier temps avec $\mathcal{A} = \sigma(Y)$.

2. En guise d'application, calculer

$$\mathbb{E}[e^{XY} | Y],$$

lorsque X et Y sont indépendantes et $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 123. Soient X, Y deux variables aléatoires de carré intégrable et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de l'espace des événements $\mathcal{A}$. Montrer que : $\mathbb{E}\{X \mathbb{E}[Y | \mathcal{B}]\} = \mathbb{E}\{Y \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]\}$.

Exercice 124. Soient $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ et A un événement. Montrer que : $\mathbb{E}[P(A | \mathcal{B}_2) | \mathcal{B}_1] = P(A | \mathcal{B}_1)$ p.s.

Exercice 125. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de carré intégrable. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on définit

$$\text{Var}[X | \mathcal{B}] := \mathbb{E}[\{X - \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]\}^2 | \mathcal{B}].$$

Montrer que : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}\{\text{Var}[X | \mathcal{B}]\} + \text{Var}\{\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]\}$.

Exercice 126. Soient X, Y deux variables aléatoires positives, indépendantes, de même loi. On pose $U := \min\{X, Y\}$ et $V := \max\{X, Y\}$. Calculer $\mathbb{E}[U | \sigma(V)]$ lorsque :

1. la loi commune est la loi exponentielle de paramètre λ ;
2. la loi commune est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 127. Soit Y une variable aléatoire ayant la densité $f_Y(y) := y^{-2} \mathbb{1}_{[1, \infty[}(y)$ et soit $X = Y$. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \infty$, mais que $\mathbb{E}[Y | \sigma(X)] < \infty$ p.s.. Même question pour le couple aléatoire (X, Y) ayant la loi jointe donnée par $p_{ij} := [i(i+1)]^{-1}$, pour $i, j = 1, 2, \dots$

Exercice 128. Soient $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite i.i.d. de v.a. réelles de densité f et de fonction de répartition F . On considère $N = \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$.

1. Montrer que la loi de N sachant $X_0 = x$ est une loi géométrique de paramètre $1 - F(x)$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = \int_{\mathbb{R}} (F(x))^{k-1} (1 - F(x)) f(x) dx$.
3. Supposons que f est continue par morceaux. Montrer que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 129. Soit $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Définissons les variables aléatoires :

$$X(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, & \text{si } \omega \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad Y(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [0, \frac{3}{4}] \\ 0, & \text{si } \omega \in]\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$Z(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0, & \text{si } \omega \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \end{cases}.$$

Montrer que $\mathbb{E}[X | \sigma(Z)] = \mathbb{E}(X)$ p.s., mais que $\mathbb{E}[X | \sigma(Y, Z)] \neq \mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$.

Exercice 130. Inégalité de Jensen. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ intégrable et soit $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On considère $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que la variable aléatoire $\varphi(X)$ soit intégrable.

1. Dire pourquoi $\varphi(X)$ est une variable aléatoire.
2. On suppose dans ce point seulement que X prend les valeurs réelles x et y avec les probabilités $\lambda \in]0, 1[$ et $1 - \lambda$. Majorer $\varphi(E(X))$.
3. On rappelle qu'une fonction réelle convexe admet des dérivées à gauche et à droite en chaque point. On note $\delta(x)$ la dérivée à droite de φ en $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \delta(x)(y - x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. Appliquer cette inégalité aux réels $y = X(\omega)$ et $x = E[X | \mathcal{B}](\omega) =: Y(\omega)$.
5. Montrer que $\varphi(Y)$ et $\delta(Y)$ sont des variables aléatoires $\mathcal{B}$ -mesurables. En déduire l'inégalité de Jensen :

$$\varphi(E[X | \mathcal{B}]) \leq E[\varphi(X) | \mathcal{B}].$$

6. Que devient cette inégalité pour $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$?
7. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $E[\cdot | \mathcal{B}]$ est un opérateur de contraction sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pourra appliquer l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $\varphi(x) = |x|^p$.

Exercice 131. Soit Z une variable aléatoire dont la loi est symétrique par rapport à zéro et soit X une variable aléatoire indépendante de Z et telle que $X \geq 1$ p.s. On note $Y := Z/X$. Calculer $E(Z)$, $E(Y)$ et $E[Y | \sigma(X)]$. Montrer que $E[Y | \sigma(X)] = E(Y)$ p.s., mais que X et Y sont dépendantes.

Exercice 132. Soit ε une v.a. prenant seulement les valeurs ± 1 avec la probabilité $1/2$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que ε est indépendante de $\mathcal{B}$ si et seulement si $E[\varepsilon | \mathcal{B}] = 0$.

Exercice 133. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathcal{H}$ si

$$E[XY | \mathcal{H}] = E[X | \mathcal{H}] E[Y | \mathcal{H}],$$

pour toutes les variables aléatoires X, Y bornées, avec $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ et $\sigma(Y) \subset \mathcal{G}$. On va montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathcal{H}$ est

$$\mathcal{H} \supset \sigma\{E[Y | \mathcal{F}] : Y \text{ bornée, } \mathcal{G}\text{-mesurable}\}.$$

1. Pour montrer que la condition est suffisante on pourra vérifier d'abord que

$$E[XY | \mathcal{H}] = E[X E[Y | \mathcal{F}] | \mathcal{H}].$$

2. Pour montrer que la condition est nécessaire il suffit de prouver que, pour toute variable aléatoire Y bornée, $\mathcal{G}$ -mesurable,

$$E[Y | \mathcal{H}] = E[Y | \mathcal{F}].$$

Pour cela on pourra vérifier d'abord que

$$E\{E[Y | \mathcal{H}] E[Y | \mathcal{F}]\} = E\{E[Y | \mathcal{H}]^2\} = E\{E[Y | \mathcal{F}]^2\}.$$

Conclure par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 134. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$, indépendantes. Soit X une variable aléatoire réelles définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on suppose que X est indépendante de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{D}$ la tribu engendrée par $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Montrer que $E[X | \mathcal{D}] = E[X | \mathcal{B}]$.

Exercice 135. Soient $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que

$$E[X | \sigma(Y)] = Y, \text{ et } E[Y | \sigma(X)] = X.$$

Montrer que $X = Y$ p.s. On pourra observer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$0 \leq E[(X - Y)\mathbf{1}_{\{Y \leq x < X\}}] = E[(Y - X)\mathbf{1}_{\{x < X\} \cap \{x < Y\}}].$$

Exercice 136. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle. Pour $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ on dit que $A_1 > A_2$ si $P(A_1^c \cap A_2) = 0$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $A := \{X > 0\}$, $B := \{E[X | \mathcal{B}] > 0\}$ et $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{B} : C > A\}$. Montrer que B est le plus petit élément de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire : $B \in \mathcal{C}$ et $\forall C \in \mathcal{C}, C > B$.

Exercice 137. Soient $p, q > 1$ deux réels conjugués, c'est-à-dire $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer que, pour tous $x, y \geq 0$, $xy \leq x^p/p + y^q/q$.
2. Soit $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $Y \in L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on note

$$B := \{E[|X|^p | \mathcal{B}] > 0\} \cap \{E[|Y|^q | \mathcal{B}] > 0\}.$$

Montrer que, sur B :

$$\frac{|XY|}{(E[|X|^p | \mathcal{B}])^{1/p} (E[|Y|^q | \mathcal{B}])^{1/q}} \leq \frac{|X|^p}{p E[|X|^p | \mathcal{B}]} + \frac{|Y|^q}{q E[|Y|^q | \mathcal{B}]}.$$

En déduire que, sur B :

$$E[|XY| | \mathcal{B}] \leq (E[|X|^p | \mathcal{B}])^{1/p} (E[|Y|^q | \mathcal{B}])^{1/q}.$$

3. Soit $B_X := \{E[|X|^p | \mathcal{B}] = 0\}$. Montrer que, sur B_X , X est nulle.
4. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$E[|XY| | \mathcal{B}] \leq (E[|X|^p | \mathcal{B}])^{1/p} (E[|Y|^q | \mathcal{B}])^{1/q}.$$

Exercice 138. Soient X, Y deux variables aléatoires. On suppose que $E(|Y|) < \infty$. Montrer que $E[Y | \sigma(X)]$ est presque sûrement constante si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$E[Y \exp(itX)] = E(Y)E[\exp(itX)].$$

Exercice 139. Soit $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

1. On suppose que :

$$P(X_1 \geq 0) = 1 \text{ et } P(X_{n+1} \geq X_n) = 1, n \geq 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \uparrow \infty} E[X_n | \mathcal{B}] = E \left[\lim_{n \uparrow \infty} X_n | \mathcal{B} \right], \text{ p.s.}$$

2. On suppose que :

$$P(|X_n| \leq Y) = 1, n \geq 1,$$

pour une certaine variable aléatoire Y intégrable et qu'il existe une autre variable aléatoire X telle que :

$$P(\lim_{n \uparrow \infty} X_n = X) = 1.$$

Montrer que :

$$\lim_{n \uparrow \infty} E[X_n | \mathcal{B}] = E[X | \mathcal{B}], \text{ p.s.}$$

3. On suppose que :

$$P(X_n \leq X) = 1, n \geq 1,$$

pour une certaine variable aléatoire X intégrable. Montrer que :

$$E \left[\limsup_{n \uparrow \infty} X_n | \mathcal{B} \right] \geq \limsup_{n \uparrow \infty} E[X_n | \mathcal{B}], \text{ p.s.}$$

Si

$$P(X_n \geq X) = 1, n \geq 1,$$

alors :

$$E \left[\liminf_{n \uparrow \infty} X_n | \mathcal{B} \right] \leq \liminf_{n \uparrow \infty} E[X_n | \mathcal{B}], \text{ p.s.}$$

4. On suppose que :

$$P(X_n \geq 0) = 1, n \geq 1.$$

Montrer que :

$$E \left[\sum_{n \geq 1} X_n | \mathcal{B} \right] = \sum_{n \geq 1} E[X_n | \mathcal{B}], \text{ p.s.}$$

3.3 Loi conditionnelle

Exercice 140. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi de Poisson de paramètre y .

1. Calculer les lois du couple (X, Y) , de X , ainsi que la loi conditionnelle de Y sachant X .
2. Montrer que $E[(X - Y)^2] = 1$, en conditionnant d'abord par rapport à Y et ensuite par rapport à X .

Exercice 141. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ une densité sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $h(x, y) = \frac{f(x+y)}{x+y} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}}$.

1. Montrer que h est une densité de probabilité.
2. Soit (X, Y) un couple de densité h . On pose $S = X + Y$.
 - (a) Déterminer la loi de S .
 - (b) Déterminer la loi jointe de (X, S) .
 - (c) En déduire la loi conditionnelle de X sachant S .

Exercice 142. 1. Montrer que la fonction $f(x, y) = 2\mathbb{1}_{\{x, y \geq 0, x+y \leq 1\}}$ est une densité de probabilité d'un couple (X, Y) .

2. Trouver les lois marginales, ainsi que la loi conditionnelle de X sachant Y .
3. En déduire que la variable aléatoire $X/(1 - Y)$ est indépendante de Y et suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 143. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$, a la densité $(\alpha/2)e^{-\alpha|y|}$, où $\alpha := (1 + x^2)/2$.

1. Trouver la densité de (X, Y) et celle de Y .
2. Montrer que Y admet des moments de tous ordres et que ceux impairs sont nuls.
3. Vérifier que la loi de Y est symétrique et trouver la fonction de répartition de $|Y|$.

Exercice 144. Trouver la loi conditionnelle et l'espérance conditionnelle de Y sachant $\sigma(X)$, lorsque la densité du couple (X, Y) est donnée par :

- i) $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}$.
- ii) $f(x, y) = x e^{-x(y+1)} \mathbb{1}_{\{x, y \geq 0\}}$.

Exercice 145. Une variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Si $X_1 = x_1$, alors X_2 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_1, x_1 + 1]$. Si $X_2 = x_2$, alors X_3 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[x_2, x_2 + 1]$. Les variables aléatoires $X_4, \dots, X_n$ sont définies de la même manière pour tous $n \geq 4$. Calculer $E(X_n)$.

Exercice 146. Soient $0 < q < 1$ et ξ, U_1, U_2 des v.a. indépendantes telles que U_1 et U_2 aient pour densité sur $\mathbb{R}$ respectivement les fonctions $g_1(t)$ et $g_2(t)$ et $\xi \sim \mathcal{B}(q)$. On considère la v.a. mélange $W = \xi U_1 + (1 - \xi) U_2$.

1. Déterminer la densité de W en fonction de g_1, g_2 et q .
2. Décrire la loi conditionnelle de W sachant ξ .
3. Déterminer la loi conditionnelle de ξ sachant $W = t$.

Exercice 147. Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ et Y telle que sa loi conditionnelle par rapport à $X = x$ soit une loi géométrique de paramètre x .

1. Déterminer la loi de Y .
2. Cette variable est-elle intégrable ?
3. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant X .

Exercice 148. Soit (X, Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times [0, 1]$ tel que :

- la loi de Y est uniforme sur $[0, 1]$;
- la loi conditionnelle de X sachant $Y = t \in [0, 1]$ est une loi géométrique de paramètre t .

1. Soit g et h des fonctions mesurables positives.

(a) **En revenant à la définition** de l'espérance conditionnelle d'une v.a. positive, démontrer que

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)|Y] = h(Y)\mathbb{E}[g(X)|Y].$$

(b) Montrer que

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \int_0^1 h(t) \left(\sum_{n \geq 1} t(1-t)^{n-1} g(n) \right) dt.$$

2. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\int_0^1 t(1-t)^{n-1} dt$ et en déduire la loi de X .
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant X .

3.4 Cas gaussien

Exercice 149. Soit U, V, W des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes et

$$Z := \frac{U + VW}{\sqrt{1 + W^2}}.$$

1. Déterminer la loi conditionnelle de Z sachant W .
2. En déduire que Z est indépendante de W et déterminer la loi de Z .

Exercice 150. Soit (X, Y) un couple gaussien centré.

i) Prouver que :

$$\mathbb{E}[Y \mid \sigma(X)] = cX, \quad \text{où } c := \frac{\mathbb{E}(XY)}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

ii) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien centré et $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit $Y := \sum_{j=1}^n a_j X_j$ et $Z := \sum_{j=1}^n b_j X_j$. Que vaut $\mathbb{E}[Z \mid \sigma(Y)]$?

Exercice 151. i) Soient Y, Y' deux variables aléatoires réelles gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes. Montrer que, pour tous $t, s \geq 0$, les variables aléatoires :

$$e^{-t}\sqrt{1-e^{-2s}}Y + \sqrt{1-e^{-2t}}Y' \quad \text{et} \quad \sqrt{1-e^{-2(t+s)}}Z$$

ont la même loi. Ici Z est une variable gaussienne centrée réduite.

ii) Soit, pour tout $t \geq 0$, l'opérateur T_t défini par :

$$T_t f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) e^{-y^2/2} dy.$$

Ici $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit Y une variable gaussienne centrée réduite. Prouver que :

$$T_t f(x) = \mathbb{E} \left[f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y) \right].$$

iii) On note par ν la mesure gaussienne centrée réduite sur $\mathbb{R}$: $\nu(dx) := (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx$ et par $L^p(\nu)$ l'espace $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Prouver que, pour $p = 1$ et $p = \infty$, T_t est, pour tout $t \geq 0$, un opérateur borné de $L^p(\nu)$ dans $L^p(\nu)$.

iv) Prouver que, pour tous $t, s \geq 0$, $T_t(T_s f) = T_{t+s} f$. (On dit que $\{T_t : t \geq 0\}$ est un semi-groupe d'opérateurs, le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck.)

v) Prouver que, pour tout $t \geq 0$, et toutes fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornées,

$$\langle T_t f, g \rangle_\nu = \langle f, T_t g \rangle_\nu, \quad \text{où } \langle f, g \rangle_\nu := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\nu(dx).$$

vi) Soit (X, Y) un couple gaussien centré tel que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1$ et $\mathbb{E}(XY) = \rho \geq 0$. Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bornée :

$$\mathbb{E}[f(Y) \mid \sigma(X)] = T_t f(X), \quad \text{avec } \rho = e^{-t}.$$

Que se passe-t-il quand $\rho = 0$ ou $\rho = 1$? Qu'obtient-on dans le cas particulier où $f(x) = x$?

Exercice 152. Soit (X, Y, Z) un triplet gaussien centré.

i) Si on suppose seulement que X et Y sont indépendantes, montrer que :

$$\mathbb{E}[Z \mid \sigma(X, Y)] = \mathbb{E}[Z \mid \sigma(X)] + \mathbb{E}[Z \mid \sigma(Y)].$$

ii) On suppose que la matrice de covariance vaut

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho_1 \\ 0 & 1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que l'on a $\rho_1^2 + \rho_2^2 \leq 1$.

b) Soit (X', Y', Z') un triplet gaussien centré de matrice de covariance égale à l'identité. Définissons :

$$\bar{X} := X', \bar{Y} := Y', \bar{Z} := \rho_1 X' + \rho_2 Y' + \sqrt{1 - \rho_1^2 - \rho_2^2} Z'.$$

Prouver que $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ un triplet gaussien de même loi que (X, Y, Z) .

iii) Si la matrice de covariance est l'identité, quelle est la loi de

$$\frac{(X + YZ)}{\sqrt{1 + Z^2}}?$$

Exercice 153. Soit (X, Y) un couple gaussien tel que $\mathbb{E}(X) = m_x$, $\mathbb{E}(Y) = m_y$, $\text{Var}(X) = \sigma_x^2$, $\text{Var}(Y) = \sigma_y^2$ et $\rho(X, Y) = \rho$.

1. Montrer que : $\mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)] = m_x + \rho\sigma_x(Y - m_y)/\sigma_y$.
2. On définit la variance conditionnelle :

$$\text{Var}[X \mid \sigma(Y)] := \mathbb{E}[\{X - \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]\}^2 \mid \sigma(Y)].$$

Alors $\text{Var}[X \mid \sigma(Y)] = \sigma_x^2(1 - \rho^2)$.

3. On suppose que $m_x = m_y = 1$, $\sigma_x^2 = 2$, $\sigma_y^2 = 1$ et que $\rho = -1/\sqrt{2}$. Faire le calcul de la loi conditionnelle de Y sachant X .
4. On suppose que $m_x = m_y = 0$ et que $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$. Montrer que :

$$\mathbb{E}[X^2 \mid Y^2 = y^2] = \frac{1}{2} \{ \mathbb{E}[X^2 \mid Y = y] + \mathbb{E}[X^2 \mid Y = -y] \} = 1 + \rho^2(y^2 - 1).$$

3.5 Martingales

Exercice 154. Soit $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $n \geq 1$.

1. On suppose les variables X_n intégrables. Montrer que :

$$\left\{ Y_n - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) : n \geq 1 \right\}$$

est une martingale.

2. On suppose que les variables X_n sont centrées et de carré intégrable. Montrer que :

$$\left\{ Y_n^2 - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j^2) : n \geq 1 \right\}$$

est une martingale.

Exercice 155. Soit $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $\varphi(u) := \mathbb{E}[\exp iuX_1]$ la fonction caractéristique de la loi commune. Si $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, montrer que :

$$\left\{ \frac{\exp iuS_n}{\varphi(u)^n} : n \geq 1 \right\}$$

est une martingale (complexe).

Exercice 156. Soit $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{E}(X_n) = m_n \neq 0$, $n \geq 1$ et $X_n \in L^p$, $\forall p$. Montrer que :

$$\left\{ Y_n = \prod_{j=1}^n \frac{X_j}{m_j} : n \geq 1 \right\}$$

est une martingale.

Exercice 157. Soit $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in]0, 1[$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p$, $n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, on introduit :

$$S_n := \sum_{j=1}^n X_j, Y_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \text{ et } Z_n := \frac{\cos\{\lambda[S_n - c]\}}{(\cos \lambda)^n}, c \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que Y est une martingale.
2. Montrer que Z est une martingale si $\cos \lambda \neq 0$ et si $p = q$.

Exercice 158. Soit ξ une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(\xi = n) = p^n(1 - p)$, $n \geq 0$. Soit, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\xi \wedge (n + 1)$.

1. Montrer que :

$$\mathcal{F}_n = \sigma \{ \{\xi = 0\}, \{\xi = 1\}, \dots, \{\xi = n\}, \{\xi \geq n + 1\} \}.$$

2. Montrer que :

$$X_n := \mathbf{1}_{\{\xi \leq n\}} - (1 - p)(\xi \wedge n) \text{ et } Y_n := X_n^2 - p(1 - p)(\xi \wedge n), n \geq 0,$$

sont deux martingales.

Exercice 159. 1. Soit $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ une filtration, T un temps d'arrêt et $A \in \mathcal{F}_T$. On pose :

$$T_A := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ \infty & \text{sur } A^c. \end{cases}$$

Montrer que T_A est un temps d'arrêt.

2. Si S est un temps d'arrêt tel que $T \leq S$, soit :

$$U := \begin{cases} T & \text{sur } A \\ S & \text{sur } A^c. \end{cases}$$

Montrer que U est un temps d'arrêt.

3. Soit $\{M_n : n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires telles que, $E[|M_n|] < \infty$, pour tout $n \geq 0$. Montrer que M est une martingale si et seulement si $E[M_\tau] = E[M_0]$, pour tout temps d'arrêt borné τ . Pour établir une partie, on pourra considérer des temps d'arrêt U avec $T \equiv n$, $A \in \mathcal{F}_n$ et $S \equiv n+1$.

Exercice 160. Soit T un temps d'arrêt par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\phi(n) := \inf\{k \geq 0 : \{T = n\} \in \mathcal{F}_k\}.$$

Prouver que $\phi(T)$ est un temps d'arrêt, majoré par T .

Exercice 161. Soit $\{Y_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$P(Y_n = -1) = 1 - 2^{-n}, P(Y_n = 2^n - 1) = 2^{-n}.$$

Soit :

$$T := \inf\{n \geq 1 : Y_n \neq -1\}, \text{ et } X_n := \sum_{j=1}^n (-1)^j Y_j \mathbf{1}_{\{j \leq T\}}, n \geq 1.$$

1. Montrer que X est une martingale.

2. Prouver que $P(T = \infty) > 0$.

3. Soit $X^* := \sup_{n \geq 1} |X_n|$. Prouver que X^* est presque sûrement fini et que, sur $T = \infty$, $X_{2n-1} = 1$ et $X_{2n} = 0$, pour tout $n \geq 1$ et que p.s. X_n ne converge pas.

Exercice 162. Soit $\{X_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X_n := \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } (2n)^{-1} \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - n^{-1} \\ -1 & \text{avec probabilité } (2n)^{-1}. \end{cases}$$

Soit $Y_1 = X_1$ et pour $n \geq 2$:

$$Y_n := \begin{cases} X_n, & \text{si } Y_{n-1} = 0 \\ nY_{n-1}|X_n|, & \text{si } Y_{n-1} \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que Y est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

2. Montrer que $\{Y_n : n \geq 1\}$ ne converge pas presque sûrement. Cette suite converge-t-elle ?

3. Pourquoi le théorème de convergence des martingales ne s'applique pas ?

Exercice 163. Soit $\{X_n : n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires. On note :

$$\bar{X}_n := \sup_{0 \leq j \leq n} X_j, \underline{X}_n := \inf_{0 \leq j \leq n} X_j, X_n^* := \sup_{0 \leq j \leq n} |X_j|.$$

1. On suppose que X est une sur-martingale, c'est-à-dire $X_n \in L^1$, pour tout n , et $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq X_n$. Soit $x \geq 0$. Montrer que :

$$xP(\bar{X}_n \geq x) \leq E[X_0] - E[X_n \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n \leq x\}}],$$

$$xP(\underline{X}_n \leq -x) \leq -E[X_n \mathbb{1}_{\{\underline{X}_n \leq -x\}}] \leq E(|X_n|).$$

On pourra introduire les temps d'arrêt $\tau := \inf\{k \geq 0 : X_k \geq x\} \wedge n$ et $\sigma := \inf\{k \geq 0 : X_k \leq -x\} \wedge n$.

2. Montrer que si X est une sur-martingale positive, on a :

$$xP(\bar{X}_\infty \geq x) \leq E(X_0), \forall x \geq 0.$$

En particulier, $\bar{X}_\infty$ est une variable aléatoire finie p.s.

3. Inégalité de Doob. On suppose maintenant que X est une sous-martingale (c'est-à-dire que $-X$ est une sur-martingale) positive. Soit $p > 1$ et q son conjugué : $1/p + 1/q = 1$. Montrer que :

$$xP(\bar{X}_n \geq x) \leq E[X_n \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n \geq x\}}], \quad x \geq 0, n \geq 0.$$

Établir

$$E[\bar{X}_n^p] \leq \frac{p}{p-1} E[X_n \bar{X}_n^{p-1}].$$

On pourra multiplier l'inégalité précédente par x^{p-2} , puis intégrer. Enfin, utiliser l'inégalité de Hölder pour obtenir :

$$E[\bar{X}_n^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[X_n^p], \quad n \geq 0.$$

Exercice 164. Soit X une martingale telle que, pour tout $n \geq 1$, $E(X_n) = 0$ et $E(X_n^2) < \infty$. Montrer que :

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j > x\right) \leq \frac{E(X_n^2)}{E(X_n^2) + x^2}, \quad x > 0.$$

Exercice 165. Soit $\{\varepsilon_n : n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$P(\varepsilon_1 = 1) = p, P(\varepsilon_1 = -1) = q, \text{ avec } p, q > 0, p + q = 1.$$

On pose $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et, pour $a \in \mathbb{Z}$:

$$\tau_a := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = a\}, (\inf \emptyset = +\infty).$$

1. Montrer que τ_a est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$
2. Soit $0 < u < 1$, $b > 0$ et $X_n := u^n b^{S_n}$. Montrer que $\{X_n : n \geq 0\}$ est une martingale, si $1 = u(pb + q/b)$.
3. Prouver que :

$$E[u^{\tau_a} \mathbb{1}_{\{\tau_a < \infty\}}] = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqu^2}}{2qu} \right)^a$$

et que :

$$P(\tau_a < \infty) = \inf\{1, (p/q)^a\}, \text{ pour } a \in \mathbb{N}.$$

Que se passe-t-il pour a négatif ?

4. On suppose $p < q$ et $a \in \mathbb{N}$. Vérifier que

$$P(\tau_{-a} < \infty) = 1, P(\tau_a < \infty) = (p/q)^a.$$

Retrouver ce résultat en utilisant la loi des grands nombres. Prouver que $1 + \bar{S}_\infty$ suit une loi géométrique, où $\bar{S}_\infty := \sup_{n \geq 0} S_n$.

5. On suppose maintenant $p = q = 1/2$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\tau_a < \infty$ p.s. Vérifier que

$$\{S_{n+\tau_a} - a : n \geq 0\} \text{ a la même loi que } \{S_n : n \geq 0\}.$$

Enfin, prouver que

$$\limsup_{n \uparrow \infty} S_n = +\infty, \liminf_{n \uparrow \infty} S_n = -\infty, \text{ p.s.}$$