

Mathématiques Appliquées

Master 1 QESIS/CAC

Université de Bourgogne

2025-2026



1) Variables aléatoires

Exercice 1 : On étudie la capacité en microfarads (μF) d'un type de condensateur. Les capacités possibles sont $2\mu\text{F}$, $4\mu\text{F}$, $6\mu\text{F}$ et $8\mu\text{F}$ et suivent une distribution uniforme.

- ▷ 1) Calculez la probabilité qu'un condensateur choisi au hasard ait une capacité de $6\mu\text{F}$.
- ▷ 2) Quelle est la probabilité qu'un condensateur choisi au hasard ait une capacité inférieure à $5\mu\text{F}$?
- ▷ 3) Calculez la capacité moyenne attendue pour ce type de condensateur.
- ▷ 4) Reprendre les questions précédentes mais cette fois en supposant que les probabilités associées à chaque capacité sont respectivement 0.2, 0.3, 0.4 et 0.1.

Exercice 2 : Pour réaliser le montage d'un système électronique, on dispose de résistances issues d'une production importante. On sait que le pourcentage p de défectueuses est de 5%. On doit utiliser 4 résistances.

- ▷ 1) Quelle est la probabilité d'en avoir 3 de mauvaises?
- ▷ 2) Quelle est la probabilité d'en avoir plus de 2 qui fonctionnent?
- ▷ 3) Combien en moyenne a-t-on de résistances qui fonctionnent?

Exercice 3 : Une compagnie assure un parc de 200 véhicules contre un risque qui a la probabilité 0.5% de survenir. Chaque prime rapporte 30 Euros à la compagnie; elle verse 2000 Euros pour chaque sinistre.

- ▷ 1) Soit Y la v.a. qui associe à tout parc de 200 véhicules le nombre de sinistres. Quelle est la loi de Y ?
- ▷ 2) Justifier que cette loi peut être approximée par une loi de Poisson de paramètre 1.
- ▷ 3) Déterminer la probabilité que la compagnie réalise un bénéfice strict. On utilisera la loi binomiale et la loi de Poisson et on comparera les résultats.

Exercice 4 : Dans une chaîne de production, la probabilité de trouver un défaut par un auditeur est de 1%.

- ▷ 1) Quelle est la probabilité que le premier défaut soit trouvé à la 70^{ème} pièce vérifiée?
- ▷ 2) Quelle est la probabilité que plus de 50 pièces doivent être auditées pour trouver un défaut?
- ▷ 3) En moyenne, combien faut-il contrôler de pièces avant d'en trouver une défectueuse?
- ▷ 4) On n'a toujours pas observé de défaut au bout de 50 pièces. Quelle est la probabilité d'en contrôler en tout moins de 100 pour observer un premier défaut?
- ▷ 5) Quel est le nombre minimal k de contrôles à prévoir pour que la probabilité d'avoir à effectuer moins de k contrôles avant de trouver la première pièce défectueuse soit d'au moins 99%?

Exercice 5 : Un ingénieur travaille sur la calibration d'un instrument de mesure de longueur. Les mesures effectuées par cet instrument sont sujettes à une certaine incertitude. Pour modéliser cette incertitude, l'ingénieur suppose que la longueur mesurée suit une distribution uniforme continue sur l'intervalle $[2, 6]$.

- ▷ 1) Quelle est la densité de probabilité correspondante? La tracer.
- ▷ 2) Déterminer graphiquement la probabilité que la longueur mesurée soit inférieure à 4 unités.
- ▷ 3) Déterminer graphiquement la probabilité que la longueur mesurée soit comprise entre 3 et 5 unités?
- ▷ 4) Déterminez la valeur attendue (espérance) et l'écart-type de la longueur mesurée.
- ▷ 5) Même question avec la loi triangulaire isocèle sur cet intervalle.

Exercice 6 : La durée de vie moyenne d'un moteur est de 5 ans et suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- ▷ 1) Que vaut λ ? Quelle est la densité de probabilité associée à cette loi?
- ▷ 2) Quelle est la probabilité que la durée de vie soit (a) supérieur à 2 ans (b) inférieure à 6 mois (c) comprise entre 6 mois et 2 ans?
- ▷ 3) On suppose que 50% d'un grand nombre de clients ont été dépannés durant la garantie. Quelle est la durée de cette garantie? Même question avec 10% des clients.
- ▷ 4) On dispose d'un moteur depuis 5 ans qui n'est pas encore tombé en panne. Quelle est la probabilité de le garder encore 18 mois avant qu'il ne tombe en panne?
- ▷ 5) On considère un lot de 10 moteurs fonctionnant de manière indépendante.
 - (a) Combien en moyenne de moteurs dans ce lot n'ont pas de panne pendant les 2 premières années?
 - (b) Combien faut-il acheter de ces moteurs pour observer une panne de l'un d'eux avant 2 ans avec probabilité supérieure à 95%.
- ▷ 6) On considère maintenant un lot de 42 moteurs fonctionnant de manière indépendante.
 - (a) Combien en moyenne de moteurs dans ce lot n'ont pas de panne pendant les 6 premiers mois?
 - (b) Justifier que la distribution du nombre de moteurs qui sont tombés en panne dans ce lot pendant les 6 premiers mois peut être approchée par une loi de Poisson.

Exercice 7 : Un atelier dispose de 8 machines. La probabilité de panne d'une machine au cours d'une journée est 0.1. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de pannes au cours d'une journée.

- ▷ 1) Quelle est la loi de X ? Son espérance? Son écart-type?
- ▷ 2) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une panne au cours d'une journée?
- ▷ 3) Une grande usine dispose de 160 machines du même type qui doivent fonctionner en permanence.
 - (a) On peut approcher la loi de X par une loi normale, laquelle? On justifiera.
 - (b) Calculer $P(X > 16)$ avec la loi binomiale et son approximation par une loi normale. Comparer.
 - (c) L'usine achète quelques machines de réserve en cas de panne. Combien de telles machines doit-elle prévoir si elle veut que le risque d'arrêt d'une ou plusieurs des 160 machines ne dépasse pas 1%? On utilisera d'abord la loi normale et l'on comparera avec le résultat obtenu avec la loi binomiale.

Exercice 8 : Selon les conditions climatiques, l'énergie électrique X produite par un panneau photovoltaïque varie selon une loi normale avec en moyenne $\mu = 3$ kwh par jour et un écart-type de $\sigma = 0.5$ kwh. On admet en outre que les quantités d'énergie produites par deux panneaux sont indépendantes. Si on réalise une installation de n panneaux, on note par $X_1, \dots, X_n$ les énergies respectivement produites et par $T_n = X_1 + \dots + X_n$ l'énergie totale fournie par l'installation.

- ▷ 1) Préciser la loi de probabilité de T_n en fonction de n , μ et σ .
- ▷ 2) On considère une installation de $n = 25$ panneaux. Calculer la probabilité pour que la production totale soit inférieure à 70 kwh.
- ▷ 3) Une entreprise souhaite monter une installation qui produit au minimum 1000 kwh par jour avec un risque de sous-production inférieur à 1%. Déterminer le nombre minimal de panneaux nécessaires.

Exercice 9 : Un certain type d'appareil fonctionne en moyenne 1000 h avec un écart-type de 200 h avant d'être remplacé par un appareil neuf du même type.

- ▷ 1) Quelle est la probabilité d'utiliser 64 appareils ou moins en 60000 heures?
- ▷ 2) De combien d'appareils au moins faut-il disposer pour que la probabilité de ne pas en manquer en 60000 heures soit au moins de 97%?

2) Intervalles de confiance

Exercice 1 : Dans l'analyse de la qualité de fabrication d'une machine, on cherche la probabilité p pour qu'une pièce soit défectueuse. On a prélevé un échantillon de 125 pièces, on a trouvé 10 pièces défectueuses.

- ▷ 1) Déterminer un intervalle de confiance de p avec un risque d'erreur de 5%.
- ▷ 2) Si l'on voulait estimer p à ± 0.01 près avec la même confiance, quelle devrait être la taille de l'échantillon ?

Exercice 2 : Un candidat à une élection législative a fait effectuer un sondage sur un échantillon de $n = 100$ votants. Cet échantillon lui fournit 51% d'intentions de vote favorables. On note p la proportion théorique de tous les votants qui vont voter pour ce candidat.

- ▷ 1) Donner un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 99%.
- ▷ 2) Que deviennent ces intervalles si le sondage est effectué sur $n = 1000$ votants (et recueilli à nouveau 55% d'intentions de vote favorables) ? Commenter.
- ▷ 3) Pour un sondage donnant le même résultat, combien de votants devrait-on sonder pour affirmer avec une confiance de 99% que ce candidat va bel et bien gagner l'élection ? Commenter.

Exercice 3 : Lors d'un contrôle effectué à la sortie d'une chaîne de fabrication de billes en acier sur un échantillon de 126 billes, il ressort les données suivantes :

Classes	]46.6 – 52.5]	]52.5 – 58.4]	]58.4 – 64.3]	]64.3 – 70.2]	]70.2 – 76.1]
Effectifs	6	29	50	32	9

- ▷ 1) Calculer la moyenne et les écart-types expérimentaux.
- ▷ 2) Donner un intervalle de confiance à 95% du poids moyen journalier des billes.
- ▷ 3) Quelle devrait être la taille de l'échantillon si l'on voulait estimer à 0.5 mg près le poids moyen avec une confiance à 95% ?

Exercice 4 : Les durées de vie d'un échantillon de 250 composants électroniques de marque A ont donné une moyenne de 450 jours et un écart-type de 90 jours. Donner un intervalle de confiance à 99% de la durée de vie moyenne d'un composant de cette marque. Combien de composants doit-on vérifier si on veut une estimation de la durée de vie moyenne à 10 jours près avec une confiance de 99% ?

Exercice 5 : On suppose que la quantité de sucre X (exprimée en grammes) dans un litre de jus de fruits d'une marque M est une variable aléatoire de loi normale de moyenne et d'écart-type théorique μ et σ . La mesure de la quantité de sucre d'un échantillon de 10 bouteilles choisies au hasard a donné les résultats suivants : 15, 13, 16, 15, 14, 17, 15, 14, 16, 15.

- ▷ 1) Calculer les moyennes et écart-types expérimentaux.
- ▷ 2) Donner des intervalles de confiance pour μ au niveau de confiance 95% et 99%.

Exercice 6 : On s'intéresse à la durée de vie d'une certaine marque de piles. On a relevé les durées de vie (en heures) de 20 piles sélectionnées au hasard. Les données obtenues sont les suivantes : 67, 24, 65, 21, 65, 34, 62, 10, 70, 12, 64, 90, 62, 12, 69, 3, 67, 20, 65, 25. On suppose la normalité de la durée de vie.

- ▷ 1) Calculez la moyenne expérimentale et les écart-types expérimentaux de cet échantillon.
- ▷ 2) Calculez un intervalle de confiance à 95% pour la durée de vie moyenne des piles.
- ▷ 3) Si l'on souhaite réduire la marge d'erreur de l'estimation de la moyenne à 1 heure, quelle taille minimale d'échantillon serait nécessaire pour un intervalle de confiance à 95% ?

Exercice 7 : Une machine fabrique en série des axes de diamètre X (en mm). On suppose que X est une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ et variance σ^2 . La mesure de 9 pièces choisies au hasard a donné les résultats suivants : 398.4, 398.5, 399.0, 399.2, 398.8, 400.0, 400.01, 400.3, 400.6

- ▷ 1) Calculer l'écart-type expérimental s_e .
- ▷ 2) Donner des intervalles de confiance pour σ au niveau de confiance 95% et 99%.
- ▷ 3) En déduire les intervalles de confiance correspondants pour la variance.

Exercice 8 : Un échantillon de 40 cigarettes d'une certaine marque a donné les teneurs en goudron (en mg) suivantes : 12.9, 14.5, 14.4, 11.9, 16.5, 15.0, 12.4, 12.7, 15.2, 12.8, 14.8, 11.8, 14.5, 11.8, 12.9, 13.1, 14.3, 13.6, 12.9, 14.4, 14.6, 14.5, 13.5, 12.9, 14.7, 11.9, 11.8, 12.3, 12.8, 14.2, 13.4, 13.5, 14.7, 15.6, 13.4, 12.8, 13.9, 11.8, 12.9, 14.7. La norme en vigueur recommande une teneur en goudron d'au plus 13 mg par cigarette. Donner un intervalle de confiance à 95% :

- ▷ 1) de la proportion des cigarettes de cette marque qui respectent la norme de la teneur en goudron ;
- ▷ 2) de la teneur moyenne en goudron des cigarettes de la marque ;
- ▷ 3) de l'écart-type de la teneur en goudron des cigarettes de cette marque.

3) Tests statistiques

Exercice 1 : On considère la production des pièces d'une machine. La fréquence de pièces hors tolérance est estimée à $p = 0.03$. On prélève un échantillon de 500 pièces, dans lequel on a trouvé 18 pièces hors tolérance.

- ▷ 1) Peut-on, au seuil de 5%, adopter l'hypothèse $p = 0.03$? Interpréter.
- ▷ 2) Quelle est la p-value des données expérimentales ?
- ▷ 3) Calculer la puissance du test $\eta(0.036)$. Interpréter.

Exercice 2 : Au cours d'une répartition de pénicilline en flacons sur une machine automatique, on prélève à intervalles plus ou moins réguliers, un flacon dont on pèse le contenu. On a ainsi un échantillon de 250 flacons dont les masses des contenus exprimées en milligrammes se répartissent comme suit :

Classes	[116; 119[	[119; 122[	[122; 125[	[125; 128[	[128; 131[	[131; 134[	[134; 137[
Effectifs	12	33	68	72	37	18	10

Peut-on considérer avec un risque d'erreur de 1% que la masse moyenne est de 126 mg ?

Exercice 3 : Des appareils électriques de chauffage ont une moyenne de vie de fonctionnement de 20000 heures. À l'aide d'un changement de composant, le fabricant affirme que la durée de vie moyenne peut être accrue. On a testé un échantillon de 27 appareils et on a observé une durée de vie moyenne de 22000 heures et un écart-type de 7000 heures. Peut-on soutenir cette affirmation au risque de 5%, 1% ? Quelle hypothèse devrait-on vérifier sur la variable étudiée afin de valider le précédent test ?

Exercice 4 : Un fabricant de capteurs de température prétend que la variance des mesures de température de ses capteurs est de 0.02°C^2 . Cependant, un laboratoire indépendant décide de tester cette affirmation en effectuant un échantillonnage de 20 capteurs et en mesurant la température en degrés Celsius d'un bain à 23.5°C . Les mesures de température en degrés Celsius sont les suivantes :

23.5	23.3	23.8	23.4	23.7	23.6	23.8	23.2	23.5	23.4
23.6	23.7	23.4	23.6	23.3	23.7	23.9	23.5	23.6	23.4

Peut-on dire que l'affirmation du fabricant est fallacieuse ?

Exercice 5 : Lors d'une campagne de sensibilisation à la sécurité routière, deux méthodes d'enseignement ont été mises en place dans deux écoles différentes pour évaluer leur efficacité. On a mesuré le nombre d'élèves qui ont montré une amélioration de leur compréhension des règles de sécurité routière après la campagne. Les résultats sont les suivants : avec la première méthode, 45 élèves sur 200 ont montré une amélioration tandis que dans l'autre école, avec la seconde méthode, ce nombre est de 30 élèves sur 190. Peut-on dire que la seconde méthode est significativement moins bonne que la première ?

Exercice 6 : Deux machines fabriquent des pièces de cote X et Y . On cherche à détecter si les cotes moyennes sont identiques. Pour cela on prélève deux échantillons :

- ($E1$) : effectif $n_1 = 100$, moyenne $m_1 = 248$, écart-type $s_1 = 28$;
- ($E2$) : effectif $n_2 = 200$, moyenne $m_2 = 256$, écart-type $s_2 = 26$.

- ▷ 1) Peut-on considérer, avec un risque de 5%, que les écart-types théoriques sont égaux ?
- ▷ 2) Quelle hypothèse devrait-on vérifier sur X et Y afin de valider le test précédent ?
- ▷ 3) Peut-on estimer, au seuil de 1%, que les cotes moyennes sont identiques ?

Exercice 7 : On étudie la résistance de deux marques de câbles A et B. Voici deux échantillons :

B	13	11	10	17	15	16	14	17	18	19	19	22	23	25	27
A	20	18	19	27	19	17	17	24	24	16	30	26	15		

- ▷ 1) Donner les moyennes et écarts types des deux échantillons.
- ▷ 2) On admet que les données des groupes A et B suivent des lois normales. Montrer que les variances des deux groupes ne diffèrent pas significativement.
- ▷ 3) Est-ce que le niveau moyen de la résistance des câbles de la marque B est significativement plus bas que celui de l'autre marque ?

Exercice 8 : Un chercheur s'intéresse à l'effet d'un nouveau médicament sur la pression artérielle. Pour cela, il mesure la pression artérielle de 15 patients avant et après avoir pris le médicament pendant un mois. Les données obtenues sont les suivantes (en mmHg) :

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Pression avant	130	138	125	142	126	135	130	137	128	133	136	129	143	131	134
Pression après	122	134	120	138	124	130	128	132	124	129	130	125	140	128	130

Peut-on dire que la pression artérielle a significativement baissé ? On pourra admettre que les données suivent une distribution normale.

Exercice 9 : On reprend les données de l'Exercice 2. Peut-on considérer que la distribution de la masse d'un flacon de pénicilline suit une loi normale ? Une loi normale de moyenne 126 ?

Exercice 10 : On reprend les données de l'Exercice 8. Vérifier que l'on peut considérer que les données suivent des distributions gaussiennes.

Exercice 11 : Le nombre de pièces défectueuses fabriquées en une journée dans un atelier ventilé est donné dans le tableau suivant (tous les postes produisent le même nombre de pièces par jour).

Poste	1	2	3	4	5
Pièces défectueuses	22	26	16	23	13

Peut-on dire que ces résultats traduisent une différence significative entre les postes ?

Exercice 12 : Reprendre l'Exercice 7 et vérifier (ou non) l'hypothèse de normalité des variables.

Exercice 13 : Une entreprise fabrique des smartphones de deux modèles différents, A et B. Un groupe d'analystes souhaite déterminer s'il existe une relation d'indépendance entre le modèle de smartphone et la satisfaction des clients. Pour cela, ils collectent des données auprès de 300 clients et enregistrent le modèle de smartphone qu'ils possèdent (A ou B) ainsi que leur niveau de satisfaction (Satisfait, Neutre, Mécontent).

	Modèle A	Modèle B	Total
Satisfait	90	60	
Neutre	30	40	
Mécontent	15	65	
Total			

Effectuez un test d'indépendance du Chi-2 pour déterminer si le modèle de smartphone et la satisfaction des clients sont indépendants ou s'il existe une relation entre eux. Utilisez un niveau de signification de 0,05.

4) ANOVA

Exercice 1 : On teste la pénétration d'un herbicide en présence de certaines concentrations de calcium. Le tableau suivant donne le taux de pénétration (pourcentage d'herbicide qui a pénétré).

Concentration en calcium : 0	1.7	4.4	6.8	4.8	2.4	2.8	3.8	
Concentration en calcium : 100	2.3	3.2	3.2	1.8	0.7	7.6	1.1	1.5
Concentration en calcium : 400	8.2	5.3	7.7	12.3	8.6	6.3		

- ▷ **1)** Vérifier que les données du premier échantillon suivent une loi normale. On admettra par la suite que la variable "taux de pénétration" suit une loi normale sur chacune des concentrations.
- ▷ **2)** Comparer les variances des trois groupes.
- ▷ **3)** Y a-t-il une différence significative du taux de pénétration de l'herbicide en fonction de la concentration en calcium ? Si oui, donner l'intensité de l'effet (le R^2).

Facteur	1	2	3	Σ
n_i				$n =$
T_i				$T =$
C_i				$C =$
m_i				$m =$
s_i				$S_{intra}^2 =$
$\hat{s}_i$				

	d.d.l.	SC_i	S_i	F	f_α
Intra-Groupes					
Inter-Groupes					
Total					

Exercice 2 : A la suite d'une fuite de déchets radioactifs dans une rivière, on a calculé un indice d'exposition dans 4 villes bordant la rivière et distantes respectivement de 20, 40, 60, 80 km du lieu de l'incident. Dans chaque ville, on a mesuré cet indice dans des endroits différents et obtenu les résultats suivants :

Riveland	10	9,8	11,7	12,3	13,2	12,7	8,9	10,8	14,1	12,5
Clastland	8,2	7,9	8,7	9,5	9,25	7,75	7,3	8,1	8	
Columbland	7,8	5,5	6,25	5,75	7,4	6,8	6,4	5,2		
Hoodland	2,7	4,5	5,3	4,6	2,75	3,25	3,6			

- ▷ 1) Les données de Riveland varient-elles selon une loi normale ? On admettra par la suite que les données de toutes les villes sont distribuées comme des lois normales.
 ▷ 2) Effectuer une ANOVA pour comparer les quatre villes.

Facteur	1	2	3	4	Σ
n_i					$n =$
T_i					$T =$
C_i					$C =$
m_i					$m =$
s_i					$S^2_{intra} =$
$\widehat{s}_i$					

	d.d.l.	SC_i	S_i	F	f_α
Intra-Groupes					
Inter-Groupes					
Total					

5) Régression linéaire

Exercice 1 : Depuis 1995, les experts étudient la relation entre la corrosion de l'acier galvanisé et le degré d'acidité de l'atmosphère, en particulier la teneur en SO_2 . Le tableau suivant donne les résultats (X) de cette teneur et la durée de protection (Y) de l'acier galvanisé à chaud.

x	20	25	29	32	37	47	50	54	60	70	76	81	87	100	110	125
y	96	94	92	88	85	80	70	68	64	60	54	46	40	33	27	20

- ▷ 1) Calculer le coefficient de corrélation entre les deux variables et interpréter le résultat obtenu.
- ▷ 2) Donner l'équation de régression entre la variable teneur en SO_2 et la durée de protection.
- ▷ 3) Tester la validité du modèle et donner le coefficient de détermination (le R^2).
- ▷ 4) On a observé une teneur en SO_2 de 95, donner un encadrement au risque de 5% de la durée de protection de l'acier galvanisé.

Exercice 2 : La résistance à l'avancement d'un poids lourd est une fonction de la vitesse. L'objet de cet exercice est de déterminer la meilleure expression possible de cette fonction dans un intervalle de vitesse entre 10 km/h et 100 km/h. La résistance P_r est mesurée en Ohms. Le résultat de ces mesures est consigné dans le tableau suivant :

vitesse (v_i)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
résistance (p_i)	2600	5800	9900	15400	23600	34500	49000	67200	89100

- ▷ 1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire et déterminer la droite de régression de la résistance en fonction de la vitesse. Commenter.
- ▷ 2) Construire le tableau des valeurs du couple (x, y) où $x_i = v_i^2$ et $y_i = p_i/v_i$. Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (x, y) . Commenter.
- ▷ 3) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x . En déduire une relation entre v et p .
- ▷ 4) Donner deux encadrements à 5% de la résistance à une vitesse de 100 km/h en utilisant les deux équations. Quelle est la meilleure approximation ?

Exercice 3 : On a observé la multiplication d'une colonie d'une certaine bactérie dans un milieu actif en fonction du temps. Le tableau suivant indique le nombre de bactéries x en fonction du temps t . On pense que l'évolution de x est exponentielle c'est-à-dire : $x = ce^{kt}$. Les données sont les suivantes :

t	1	2	3	4	5	6	7
x	10	45	203	1200	6117	8342	21172

Transformer les données pour se ramener à un problème de régression linéaire et le traiter en déterminant les constantes c et k et analyser la fiabilité du modèle.