Chaînes de Markov à espaces d'états finis

Master MIGS/PMG 2025-2026

Yoann Offret

Exercice 1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition :*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. *Dessiner le graphe des transitions.*
2. *Déterminer les composantes irréductibles et les états transitoires et récurrents.*
3. *Déterminer la période de chaque état.*
4. *On suppose que $X_0 = 2$.*
   (a) *Quelle est la loi de X_1 ?*
   (b) *On note $P_n(i)$ la proportion de temps passée dans l'état i après n étapes. Quel est le comportement asymptotique de P_n ?*
5. *On suppose que X_0 est choisi uniformément.*
   (a) *Quelle est la loi de X_1 ?*
   (b) *Quel est le comportement asymptotique de P_n ?*
6. *Déterminer toutes les probabilités invariantes.*
7. *Simuler cette chaîne et illustrer les résultats précédents.*

Exercice 2. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Classifier les états de la chaîne. En déduire son comportement asymptotique.*
2. *Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.*
3. *Calculer la probabilité que la chaîne soit absorbée en 1 sachant que $X_0 = i$.*
4. *Quel est le temps moyen d'absorption sachant que $X_0 = i$?*
5. *Simuler cette chaîne et illustrer les résultats précédents.*

Exercice 3. *Soient d balles numérotées de 1 à d et réparties dans deux urnes A et B. On tire un nombre i au hasard entre 1 et d et on change la balle numéro i d'urne. Soit X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants.*

1. *Quel est l'espace d'états de cette chaîne ? Quelles sont ses probabilités de transition ? Son graphe ?*
2. *La chaîne est-elle irréductible ? Récurrente ? Apériodique ?*
3. *Déterminer sa probabilité invariante.*
4. *On part avec $X_0 = 0$. Quelle est l'espérance du temps de retour dans cet état ?*
5. *Déterminer*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_0 + \cdots + X_{n-1}}{n}.$$
6. *Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que l'on peut trouver une fonction F telle que la suite définie par récurrence $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$ et $X_0 \perp\!\!\!\perp (U_k)_{k\geq 1}$ soit une chaîne de Markov de même loi que celle présentée ci-dessus.*
7. *Simuler cette chaîne et illustrer les résultats précédents.*